Formulaire

1. Arithmétique

1.1. Produits remarquables

Identités remarquables
(produits remarquables)

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

1.2. Puissances et racines

Exposants négatifs ou nuls :

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Définition des exposants rationnels

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Règles de calcul des puissances pour *a* et *b* réels et *m* et *n* entiers

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

Propriétés de $\sqrt[n]{}$ (n est un entier positif)

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ si $\sqrt[n]{a}$ est un nombre réel

$\sqrt[n]{a^n} = a$ si $a \geq 0$

$\sqrt[n]{a^n} = a$ si a<0 et n est impair

$\sqrt[n]{a^n} = |a|$ si a<0 et n est pair

Règles de calcul des racines

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

1.3. Equations du 2ème degré

- Ne pas oublier de faire l'ensemble de définition des équations ou de vérifier la solution

Equations du 2ème degré $ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

si $\Delta < 0$ pas de solutions réelles

si $\Delta = 0$ une solution $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$

si $\Delta > 0$ deux solutions $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

factorisation : $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Relations de Viète

Si $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$ on a :

- $x_1 + x_2 = -b$
- $x_1 \times x_2 = c$

Equation du deuxième degré particulière

Si $x^2 = d$, alors $x = \pm\sqrt{d}$.

1.4. Inéquations

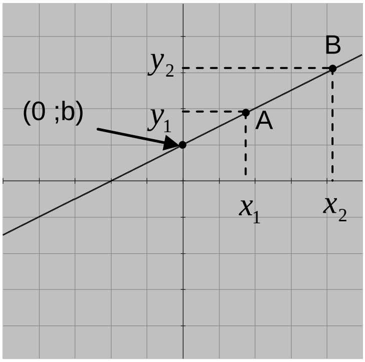
Pour résoudre une inéquation on peut :

- Ajouter ou soustraire la même grandeur aux deux membres
- Multiplier ou diviser les deux membres par le même nombre positif
- Il faut changer le sens de l'inégalité si on multiplie ou divise les deux membres par un nombre négatif

Notation des intervalles	•] non compris [• [compris]
Inéquations	$a \geq b \Leftrightarrow a + c \geq b + c$ $a \geq b \ si \ c > 0 \ ac \geq bc$ $a \geq b \ si \ c < 0 \ ac \leq bc$

2. Les fonctions

2.1. Les droites



- $f(x)=ax+b \; ou \; y=ax+b$

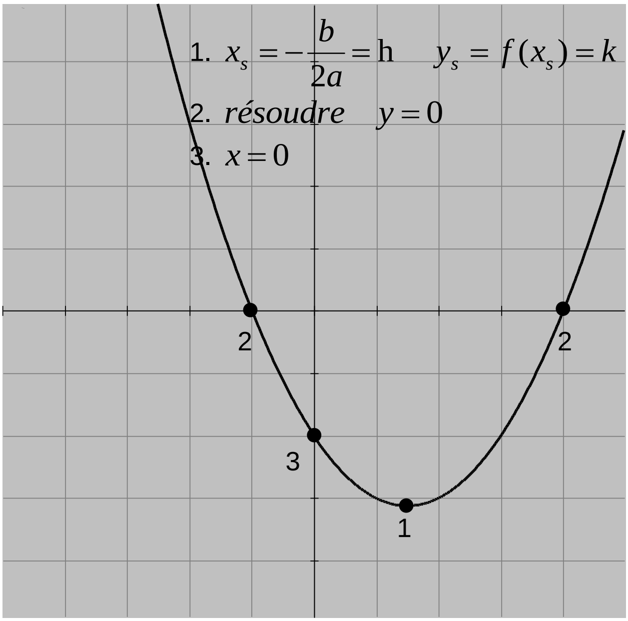
- a : pente de la droite
- Si A (x_2 ; y_2) et B (x_1 ; y_1) sont deux points de la droite : $a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

- Point sur axe des x => y = 0
- b : ordonnée à l'origine c'est-à-dire la droite passe par le point (0 ; b)

- Deux droites
  - $(d_1)//(d_2) \; si \; a_1 = a_2$ (= même pente)
  - (d_1) *perpendiculaire* à (d_2) : $a_1 \cdot a_2 = -1$

2.2. <u>Les paraboles</u>

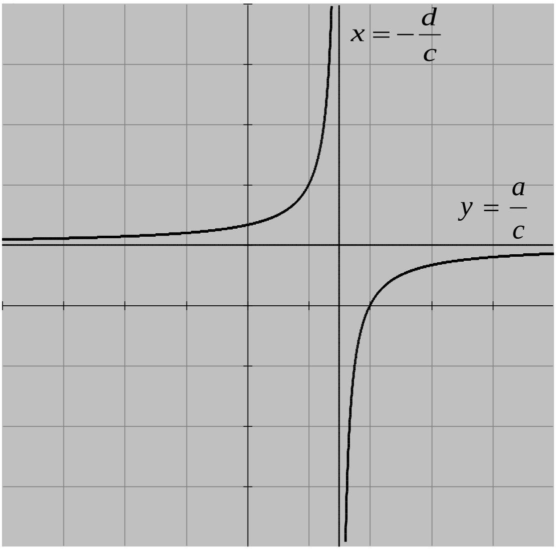
- $f(x) = ax^2 + bx + c \ ou \ y = ax^2 + bx + c$
- Signe de a :
    - Si a>0 $\bigcup$
    - Si a<0 $\bigcap$
- Coordonnées du sommet $x_s = -\dfrac{b}{2a}$ $\quad y_s = f(-\dfrac{b}{2a})$
- Si $f(x) = a(x-h)^2 + k$ le sommet a comme coordonnées $S(h;k)$



2.3. Les hyperboles

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \qquad \text{ou} \qquad y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

- Ensemble de définition $D_f = IR \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$
- Point sur l'axe des x résoudre l'équation $y=0$
- Asymptote verticale $x=-\frac{d}{c}$
- Point sur l'axe des y $y=\frac{b}{d}$
- Asymptote horizontale $y=\frac{a}{c}$

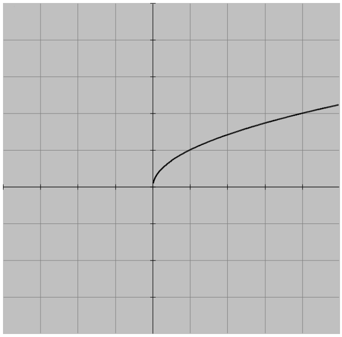


2.4. La fonction racine

$f(x) = \sqrt{x}$

$f(x)$ n'existe que si $x \geq 0$.

Ensemble de définition : $D_f = IR^+$



2.5. La fonction valeur absolue

Rappel : $|x| = \begin{cases} x \, si \, x \, est \, positif \\ -x \, si \, est \, négatif \end{cases}$

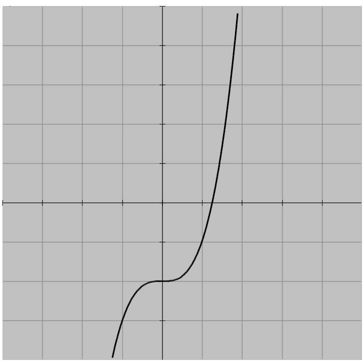
- Si $f(x) \geq 0$ (au-dessus de l'axe des x)

  $|f(x)| = f(x) \Rightarrow$ les deux graphes sont confondus

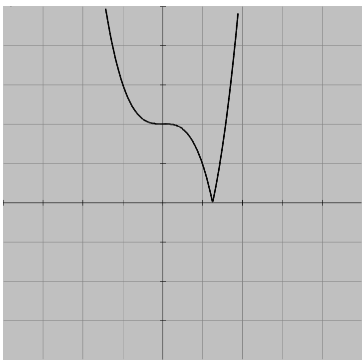
- Si $f(x) \leq 0$ (au-dessous de l'axe des x)

  $|f(x)| = -f(x) \Rightarrow$ on effectuera une symétrie du graphe avec l'axe des x

$f(x)$



$|f(x)|$



3. Les suites

3.1. Les Suites arithmétiques (addition)

- $a_{n+1} = a_n + r \quad a_1 \; fixé \qquad a_1 : premierterme \quad r : raison$
- $a_n = a_1 + (n-1)r$
- $S_n = a_1 + a_2 + ...a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

3.2. Les Suites géométriques (multiplication)

- $a_{n+1} = ra_n \qquad a_1 \; fixé \qquad r : raison$
- $a_n = a_1 r^{n-1}$
- $S_n = a_1 + a_2 + ...a_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$
- Somme infinie : $S_n = a_1 + a_2 + ... = a_1 \frac{1}{1-r} \quad si \; -1 < r < 1$

4. Les logarithmes

4.1. Définition

Le logarithme de base a de x est défini par $y = \log_a x \Longleftrightarrow x = a^y$ où $a > 0, x > 0, a \neq 1$.

4.2. Propriétés

$\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$	$\log_a a^x = x$ $a^{\log_a x} = x$
$\log(ab) = \log a + \log b$ $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$	$\log(a^n) = n \log a$ $\log_a b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a}$
$\log_{10} a = \log a$	$\ln a = \log_e a$

5. Les vecteurs

5.1. Les vecteurs en 2 dimensions

Coordonnées d'un vecteur défini par deux points

On considère les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Addition et soustraction de vecteurs

On considère les vecteurs
$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$: $\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \end{pmatrix}$

Norme d'un vecteur

La norme du vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ notée $\|\vec{a}\|$ est : $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}$

Coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes

Si $\vec{a} = (\|\vec{a}\|; \alpha) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ alors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\vec{a}\| \cos\alpha \\ \|\vec{a}\| \sin\alpha \end{pmatrix}$

Coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires

Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (\|\vec{a}\|; \alpha)$ alors $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ et $\tan\alpha = \dfrac{a_2}{a_1}$

Milieu d'un segment

$I(x_I ; y_I)$ est le milieu du segment $[AB]$ avec $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors :

$$(x_I ; y_I) = \left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

Produit scalaire

On considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = \left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos\alpha$$

α : angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \| \vec{a} \| \, proj_a \vec{b} = \| \vec{b} \| \, proj_b \vec{a}$$

Propriétés du produit scalaire :

- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $\| \vec{a} \| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$
- $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$
- Si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Centre de gravité

Le centre de gravité G de la pièce défini par les points : $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ est tel que :

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} ; \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

5.2. Les vecteurs en 3 dimensions

On considère les points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

Addition et soustraction de vecteurs 3D

On considère les vecteurs

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$: $\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$

Norme d'un vecteur 3D

La norme du vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ notée $\| \vec{a} \|$ est : $\| \vec{a} \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

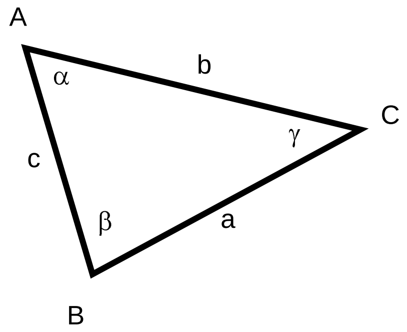
Produit scalaire 3D

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

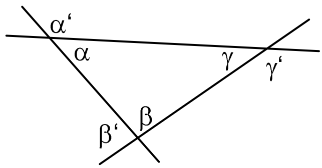
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \cos\alpha$$

6. Le triangle

6.1. Notation



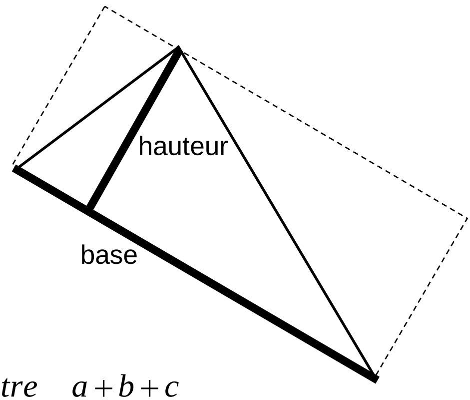
6.2. Somme des angles



Quelque soit le triangle ABC on a :

- Pour les angles intérieurs α, β et γ : $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
- Et pour les angles extérieurs (voir dessin) α', β' et γ' : $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$

6.3. Aire d'un triangle



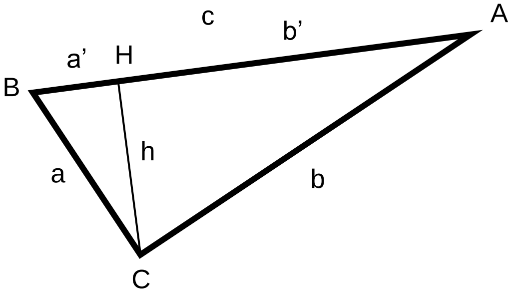
$$aire = \frac{base \cdot hauteur}{2}$$

$$aire = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin\beta}{2}$$

Formule de Héron :

$$aire = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ où } s = \frac{périmètre}{2} = \frac{a+b+c}{2}$$

6.4. Triangle rectangle



Soit ABC un triangle rectangle en C. On désigne par H le pied de la hauteur issue de C.

H détermine deux longueurs sur le côté c : b’ = AH et a’ = BH. Alors on a :

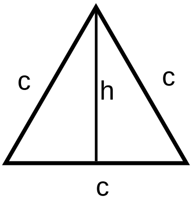
Théorème d’Euclide : $a^2 = a' \cdot c$ et $b^2 = b' \cdot c$

Théorème de la hauteur : $h^2 = a' \cdot b'$

Théorème de Pythagore : $c^2 = a^2 + b^2$

Aire : $Aire = \dfrac{c \cdot h}{2} = \dfrac{a \cdot b}{2}$

6.5. Triangle équilatéral



Les trois côtés du triangle sont de même longueur : c, les trois angles valent 60°.

Les quatre droites remarquables (hauteur, médiatrice, médiane et bissectrice) sont confondues.

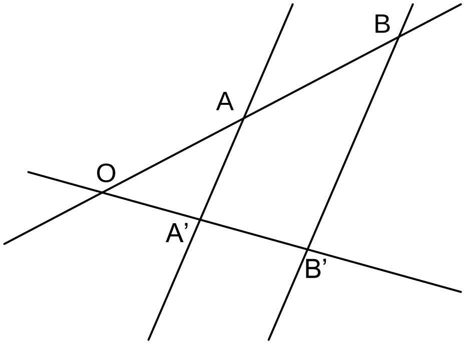
Elles ont pour longueur $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2} c$.

$$Aire = \frac{\sqrt{3}}{4} c^2$$

6.6. Théorème de Thalès

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}$$

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}$$

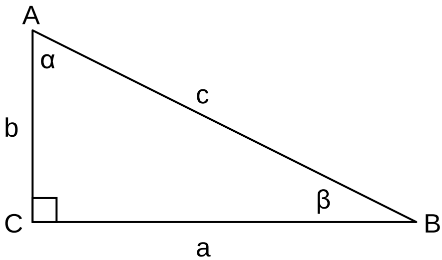


6.7. Trigonométrie dans le triangle rectangle

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

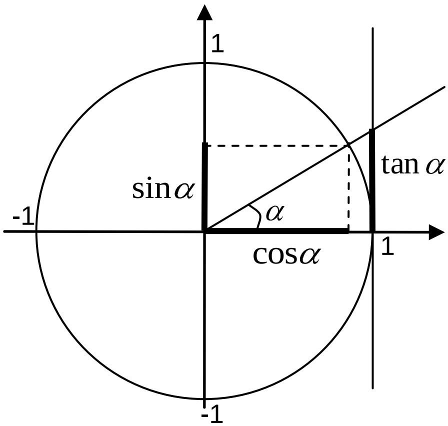
$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$



6.8. Cercle trigonométrique

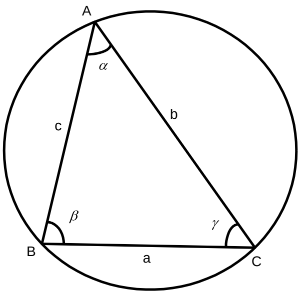
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$



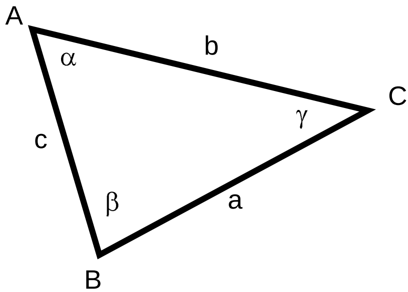
6.9. Théorème du sinus

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

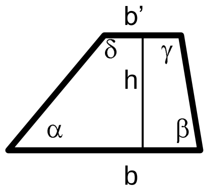
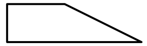
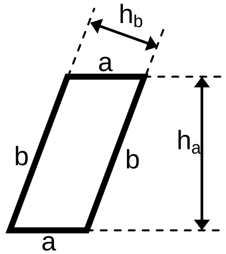
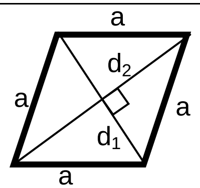
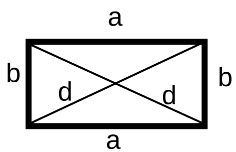
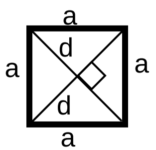


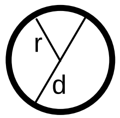
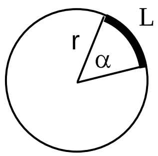
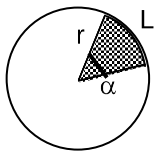
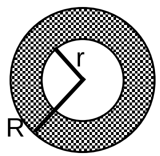
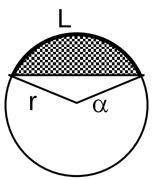
6.10. Théorème du cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



7. Polygones et parties de cercle

Nom	Illustration	Définition	Propriétés	Périmètre	Aire	Divers
Trapèze		Quadrilatère ayant deux côtés parallèles	Le **trapèze rectangle** a deux angles droits consécutifs.  Un **trapèze isocèle** a ses côtés (non parallèles) égaux 		$A = \frac{h(b+b')}{2}$	$\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180°$
Parallélogramme		Un quadrilatère satisfaisant une des affirmations ci-dessous est un parallélogramme et les quatre autres affirmations sont ses propriétés : 1. Il a deux paires de côtés parallèles 2. Ses côtés opposés sont égaux 3. Il a deux côtés parallèles égaux 4. Il a des angles opposés égaux 5. Ses diagonales se coupent en leur milieu		$P = 2(a+b)$	$A = a * h_a$ $A = b * h_b$	Un triangle est un demi parallélogramme. Son aire vaut donc $aire_\Delta = \frac{ah_a}{2}$. C'est aussi un trapèze isocèle.
Losange		Quadrilatère ayant quatre côtés égaux	Ses diagonales sont perpendiculaires (critère suffisant pour dire qu'un parallélogramme est un losange). Ce sont les bissectrices des angles du losange.	$P = 4a$	$A = \frac{d_1 * d_2}{2}$	C'est aussi un parallélogramme
Rectangle		Quadrilatère ayant quatre angles droits	Ses diagonales sont de mêmes longueurs. Ce critère est suffisant pour dire qu'un parallélogramme est un rectangle.	$P = 2(a+b)$	$A = ab$	Diagonale $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ C'est un parallélogramme
Carré		Quadrilatère ayant quatre côtés égaux perpendiculaires	Ses diagonales sont perpendiculaires de même longueur. C'est le seul quadrilatère qui est à la fois un losange et un rectangle	$P = 4a$	$A = a^2 = \frac{d^2}{2}$	Diagonale $d = \sqrt{2} * a$ $a = d\frac{\sqrt{2}}{2}$

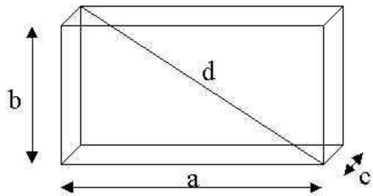
Nom	Illustration	Définition	Propriétés	Périmètre	Aire	Divers
Cercle (ou disque)		Ensemble des points situés à une distance r du centre du cercle		(ou circonférence) $\pi * \mathrm{d} = 2\pi\,\mathrm{r}$	(du disque) $A = \pi r^2 = \dfrac{\pi * d^2}{4}$	
Longueur d'arc				$L = \dfrac{2\pi r}{360}\alpha = \dfrac{\pi}{180}\alpha r$		Angle au centre α en **degré**.
Secteur circulaire					$A = \dfrac{1}{2} rL = \dfrac{\pi r^2}{360}$	Angle au centre α en **degré**.
Couronne circulaire					$A = \pi(R^2 - r^2)$	Les deux cercles n'ont pas obligatoirement le même centre
Segment circulaire					$\dfrac{r}{2}(L - r\sin\alpha)$ $\dfrac{\pi r^2}{360}\alpha - \dfrac{r^2 \sin\alpha}{2}$	Angle au centre α en **degré**.

8. Les volumes

8.1. Le parallélépipède rectangle

Volume : $V = a \cdot b \cdot c$

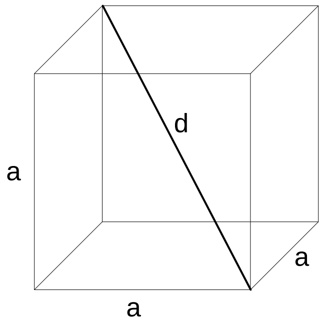
Diagonale : $d = \sqrt{a^2 + b^2 + +c^2}$



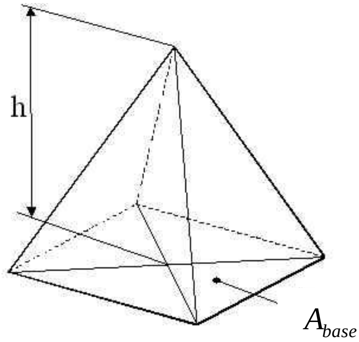
8.2. Le cube

Volume : $V = a^3$

Diagonale : $d = a\sqrt{3}$

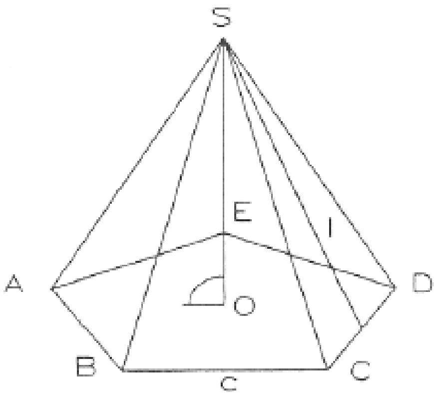


8.3. La pyramide



Volume : $V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h$

Aire d'une pyramide régulière

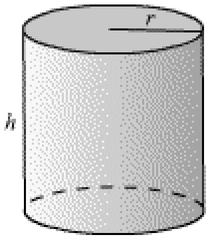


$$A_{latérale} = \frac{1}{2} p \cdot l$$

p : périmètre de la base

l : apothème

8.4. Le cylindre de révolution

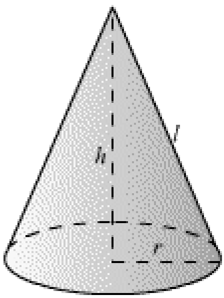


Volume : $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Aire latérale : $A_{latérale} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

Aire totale : $A_{totale} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (h + r)$

8.5. Le cône de révolution

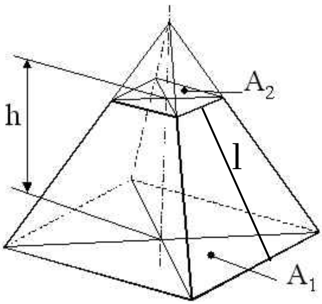


Volume : $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

Aire latérale : $A_{latérale} = \pi \cdot r \cdot l$

Aire totale : $A_{totale} = \pi \cdot r \cdot (l + r)$

8.6. Le tronc de pyramide



Volume : $V = \frac{h}{3} \left(A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2 \right)$

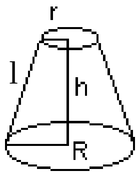
Aire latérale (pyramide régulière):

$$A_{latérale} = \frac{p_1 + p_2}{2} \cdot l$$

8.7. Le tronc de cône

Volume : $V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)$

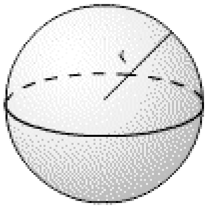
Aire latérale : $A_{latérale} = \pi \cdot \left(R + r\right) l$



8.8. La sphère

Volume : $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

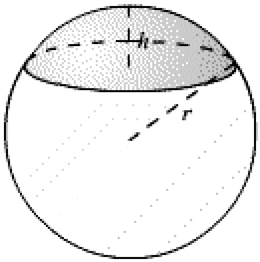
Aire : $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$



Calotte sphérique

Volume : $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot \left(3r - h\right)$

Aire : $A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$



Zone sphérique

Volume : $V = \frac{1}{6} \pi \cdot h(3a^2 + h^2 + 3b^2)$

$V = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot h \cdot \left(3 \cdot a^2 + 3 \cdot b^2 + h^2\right)$

Aire : $A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$