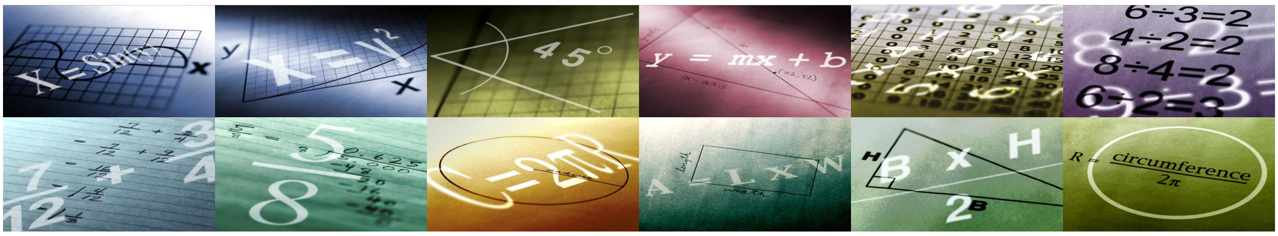


Dossier

Révisions M.P.T.

Mathématiques

Sommaire

PTI 3

Examens 13

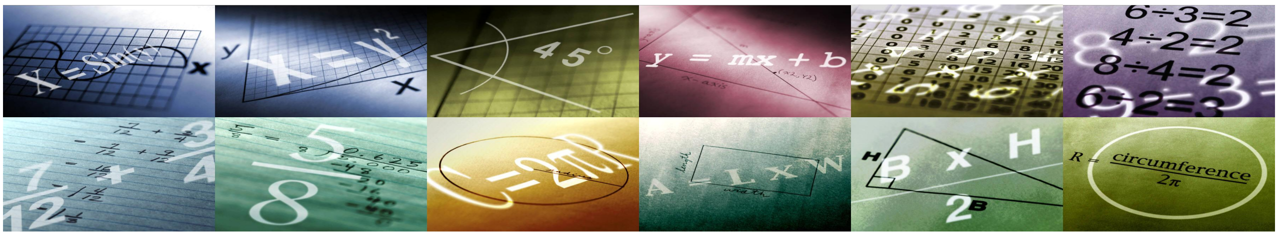
Examen M.P.T. 2001 15

Examen M.P.T. 2002 35

Examen M.P.T. 2003 55

Examen M.P.T. 2005 75

Exercices divers et réponses 87



Programme de Travail interne

P.T.I.

Semestre 1	Mathématiques 356011, 356012, 356013, 356014, 356051			40/360
No selon règlement	Thème - Chapitre – sous chapitre	Niveau de taxonomie	Nombre de période(s)	Support(s) de cours utilisé(s)
	Présentation, examen d'admission (évaluation)		4	
412.103.01	*ALGEBRE*			Algèbre, Swokowski + Cole, LEP
	Ensembles et nombres	C1-3	2	1.1
	Puissances et racines	C1-3	8	1.2
	Monômes et polynômes	C1-3	4	1.3 + 4.2 + 7.5 exemple 6
	GEOMETRIE			Bases de géométrie
	Le triangle			
	Notions de base	C1-2	2	
	Congruence, théorème de Thalès	C1-3	6	
	Triangle rectangle : Euclide et Pythagore	C1-3	4	
	Applications : exercices, triangle équilatéral, cercle de Thalès …	C1-3	4	
	INTERS		6	
Total des périodes			**40**	

Semestre 2	Mathématiques 356011, 356012, 356013, 356014, 356051			80/360
No selon règlement	Thème - Chapitre – sous chapitre	Niveau de taxonomie	Nombre de période(s)	Support(s) de cours utilisé(s)
412.103.01	*ALGEBRE*			Algèbre, Swokowski + Cole, LEP
	Monômes et polynômes (suite)	C1-3	4	1.3 + 4.2 + 7.5 exemple 6
	Fractions rationnelles	C1-3	5	1.4
	Equations du premier degré			
	Notions générales, principes d'équivalence	C1-3	1	2.1
	Equations simples et fractionnaires	C1-3	5	2.1
	Mise en équation de problèmes et discussion	C1-3	2	2.2
	GEOMETRIE			Bases de géométrie
	Le triangle (suite)			
	Théorème de Héron	C1-3	1	
	Points et lignes remarquables	C1-3	5	
	TRIGONOMETRIE			Selon l'enseignant d'après : - Cours de trigonométrie Alain Borgeaud, SàRL - Trigonométrie Swokowski + Cole, LEP - autres
	Dans le triangle rectangle			
	Mesure des angles : degrés, DMS, radians. Longueurs d'arc	C1-3	2	
	Rapports trigonométriques : définitions + exercices	C1-3	4	
	Aire du triangle quelconque	C1-3	1	
	Valeurs exactes des rapports trigonométriques d'angles particuliers	C1-3	1	
	INTERS		6	
	Grande évaluation		3	
Total des périodes			40	

Semestre 3	Mathématiques 356021, 356022, 356023, 356024, 356061			120/360
No selon règlement	Thème – Chapitre – sous chapitre	Niveau de taxonomie	Nombre de période(s)	Support(s) de cours utilisé(s)
412.103.01	*ALGEBRE*			Algèbre, Swokowski + Cole, LEP
	Equations du premier degré			
	Inéquations du premier degré	C1-3	2	2.6
	Mise en équation de problèmes et discussion	C1-3	2	2.2
	Systèmes d'équations			
	Systèmes d'équations linéaires	C1-3	3	6.1 6.2
	Problèmes à plusieurs inconnues	C1-3	4	6.3
	Equation vectorielle, calcul matriciel	C1-3	2	
	Systèmes 2x2 généralités	C2	2	6.9 6.10
	Systèmes 2x2 Cramer + exercices	C2-C3	2	6.9 6.10
	Systèmes 3x3 Cramer + exercices	C3	2	6.9 6.10
	GEOMETRIE			Bases de géométrie
	Polygones et cercles			
	Définitions polygones, généralités	C2	1	
	n-gones + cercle : formulaire	C4	2	
	Thalès, Arc capable	C3-C4	4	
	Exercices	C3-C5	8	
	INTERS		6	
	Total des périodes		**40**	

Remarque

- **Classe 356021 (électroniciens) :** Traiter les systèmes d'équations du 1er degré à 2, 3 ou 4 équations et inconnues au début du 3ème semestre : nécessité pour le CFC.

Semestre 4	Mathématiques 356021, 356022, 356023, 356024, 356061			160/360
No selon règlement	Thème – Chapitre – sous chapitre	Niveau de taxonomie	Nombre de période(s)	Support(s) de cours utilisé(s)
412.103.01				
	ALGEBRE			Algèbre, Swokowski + Cole, LEP
	Fonction du premier degré : équation de droite			
	Relation et fonctions, généralités	C1-3	1	3.2 3.4
	Coefficient angulaire, la pente	C1-3	3	3.3
	Fonctions affines et linéaires	C1-3	3	3.3
	Droites parallèles et perpendiculaires	C1-3	1	3.3
	Equations du second degré			
	Complétion du carré, formule de résolution	C3	3	2.3
	Relations de Viète	C3	2	A ajouter
	Equations réductibles au premier et second degré	C3	8	2.5
	Systèmes du second degré	C3-C4	4	6.1
	Inéquations second degré, Tableau des signes	C4	4	2.7
	Trigonométrie			Selon l'enseignant d'après : - Cours de trigonométrie Alain Borgeaud, SàRL - Trigonométrie Swokowski + Cole, LEP - autres
	Cercle trigonométrique et triangle quelconque			
	Définitions et utilisation du cercle trigonométrique	C1-3	4	
	Coordonnées cartésiennes et polaires	C1-3	1	
	INTERS		6	
	Total des périodes		40	

Remarque

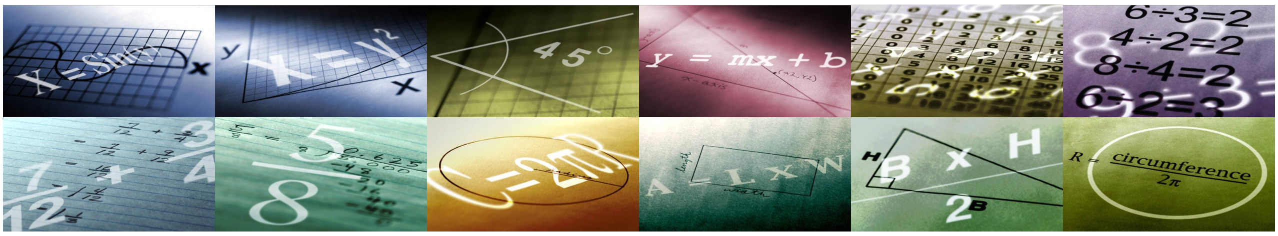
- **Classe 356021 (électroniciens) :** Trigonométrie : Parler des nombres complexes (2 périodes maximum)
  Au CFC : +, -, *, / **à l'aide de la calculatrice** pour des nombres donnés sous la forme trigonométriques.

Semestre 5	Mathématiques 356031, 356032, 356033, 356071			200/360
No selon règlement	Thème – Chapitre – sous chapitre	Niveau de taxonomie	Nombre de période(s)	Support(s) de cours utilisé(s)
412.103.01	*ALGEBRE*			Algèbre, Swokowski + Cole, LEP
	Les fonctions			
	Les fonctions du second degré	C3	8	3.5 3.6
	Les fonctions racines (exercices)	C3	2	3.4
	Les fonctions rationnelles (exercices)	C3	8	4.5
	Volumes et surfaces de corps dans l'espace			Bases de géométrie
	Généralités	C2	1	
	Etablir un formulaire pour les corps suivants: - parallélépipèdes et cylindres - pyramides et cônes - troncs - sphère et parties de sphères	C3	4	
	Exercices	C3	11	
	INTERS		6	
Total des périodes			40	

Semestre 6	Mathématiques 356031, 356032, 356033, 356071			240/360
No selon règlement	Thème - Chapitre – sous chapitre	Niveau de taxonomie	Nombre de période(s)	Support(s) de cours utilisé(s)
412.103.01	*ALGEBRE*			Algèbre, Swokowski + Cole, LEP
	Les fonctions (suite)			
	La fonction valeur absolue	C3	2	3.5
	Résolution graphique d'équations et inéquations (exercices)	C4	4	
	Opérations sur les fonctions : f ± g, f · g, f/g	C3	2	3.7
	Composition de fonctions et fonctions inverses (exercices)	C3	6	3.7 3.8
	TRIGONOMETRIE			Selon l'enseignant d'après : - Cours de trigonométrie Alain Borgeaud, SàRL - Trigonométrie Swokowski + Cole, LEP - autres
	Triangle quelconque et fonctions trigonométriques			
	Théorème du sinus et du cosinus, exercices	C1-3	8	
	Fonctions trigonométriques de deux angles	C1-3	3	
	Graphes des fcts trigo. , période, amplitude…	C1-3	4	
	INTERS		6	
	Réserve		5	
Total des périodes			**40**	

Semestre 7	Mathématiques 356041, 356042, 356043, 356081			300/360
No selon règlement	Thème - Chapitre – sous chapitre	Niveau de taxonomie	Nombre de période(s)	Support(s) de cours utilisé(s)
412.103.01	*ALGEBRE*			Algèbre, Swokowski + Cole, LEP
	Exponentielles et logarithmes		(23)	
	Les exposants irrationnels	C2	1	5.1
	Fonctions exponentielles (exercices)	C3	2	5.1 5.2
	Définition de e	C1	1	5.1
	Phénomènes de croissance exponent.	C3	3	5.1 5.2
	Définition du logarithme	C3	2	5.3
	Problèmes	C3	3	5.3
	Propriétés des logarithmes	C3	5	5.4
	Calcul logarithmique (exercices)	C3	6	5.5
	GEOMETRIE			
	Calcul vectoriel		(19)	
	Définitions, égalités	C3	1	
	Graphiquement : somme et différence de vecteurs et multiplication par un scalaire	C3	2	
	Relation de Chasles	C3	1	
	Composantes d'un vecteur, $\overrightarrow{AB}$	C3	2	
	Algébriquement : somme et différence de vecteurs et multiplication par un scalaire	C3	2	
	Norme d'un vecteur	C3	1	
	Produit scalaire : deux définitions et propriétés	C3	3	
	Exercices	C3	7	
	INTERS		6	
	Réserve		12	
Total des périodes			60	

Semestre 8	Mathématiques 356041, 356042, 356043, 356081			360/360
No selon règlement	Thème - Chapitre – sous chapitre	Niveau de taxonomie	Nombre de période(s)	Support(s) de cours utilisé(s)
412.103.01	*ALGEBRE*			
	Les suites (ou progressions) Pas dans le PEC : selon le temps disponible			
	Définition et exemples : suite et série	C3	2	7.1
	Propriétés : convergence	C3	1	
	Suites arithmétiques + exercices	C3	6	7.2
	Suites géométriques + exercices	C3-C4	8	7.3
	TRIGONOMETRIE			Selon l'enseignant d'après : - Cours de trigonométrie Alain Borgeaud, SàRL - Trigonométrie Swokowski + Cole, LEP - autres
	Equations trigonométriques			
	Equations du type sin α = 0,2	C3	2	
	Autres types d'équations (simple)	3	5	
	Révision	C3-C5	15	
	INTERS		6	
	Cours supprimés (examens fin mai)		15	
	Total des périodes		**60**	



Examens
et
corrections

ECOLE PROFESSIONNELLE SUPERIEURE EPS
MATURITE PROFESSIONNELLE TECHNIQUE

EXAMEN FINAL 2001

No. du candidat :

Nom et prénom ....:Profession :.......................................

MATHEMATIQUES
2001

L'épreuve des mathématiques est constituée de deux parties:

Partie 1 sans calculatrice ni formulaire d'une durée de 40 minutes
Partie 2 avec calculatrice et formulaire d'une durée de 80 minutes.

Consigne : Les réponses sans développement ne sont pas valables

Partie 1	points :		(max.15)
Partie 2	points :		(max. 30)

TOTAL (max. 45)

$$\text{note} = \frac{\text{nombres de points}}{45} \cdot 5 + 1 \quad \text{(arrondie au demi)}$$

NOTE

Expert enseignant : ____________________ **2e expert :** ____________

Date : ______________________________ **Date :** ______________

MATHEMATIQUES 1° PARTIE / 40 minutes

sans calculatrice ni formulaire

1. ...... / 3 pts

Résolvez l'équation suivante pour x appartenant à l'intervalle $[0°;360°[$:

$$2\cos^2 x + \cos x = 0$$

2. ...... / 3 pts

Déterminez, par calcul, la fonction affine h(x) dont le graphe passe par $P(35;4.3)$ *et est perpendiculaire à celui de* $g(x)$: $3y = 5x + 21$.

3. ...... / 3 pts

Résolvez l'équation suivante : $1+\log_2(4-x)=2\cdot\log_2(x)$

4. ...... /

Isolez R_1 dans la formule suivante (capacité d'un condensateur sphérique)

$$C=4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)^{-1}$$

5. ...... / 3 pts

Résolvez l'inéquation suivante : $\frac{3x-2}{5x+15} \geq \frac{5x-6}{3x+9}$

Partie 1 points : (max.15)

Nom et prénom : .... N° du candidat : ....

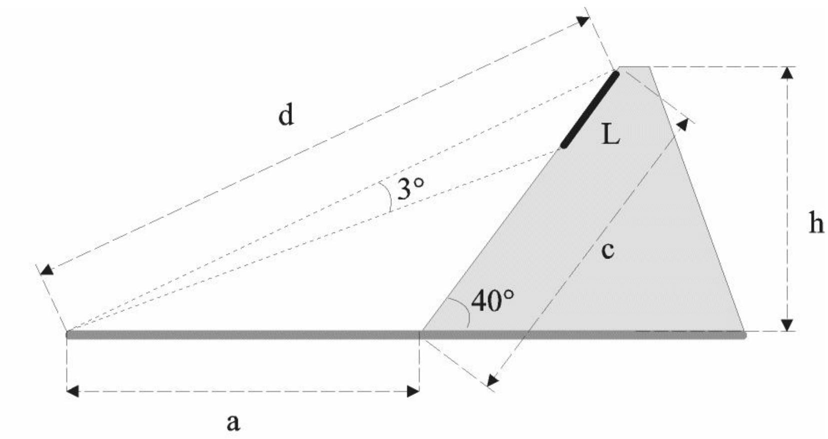
MATHEMATIQUES 2° PARTIE / *80 minutes*

avec calculatrice et formulaire

1.

.... / 6 pts

Une personne se trouve à une distance ***a** = 2000 m d'un volcan. Elle observe une coulée de lave sous un angle de 3°. La hauteur du volcan est* ***h** = 500 m. Le flanc du volcan forme avec l'horizontale un angle de 40°. (voir le croquis)*

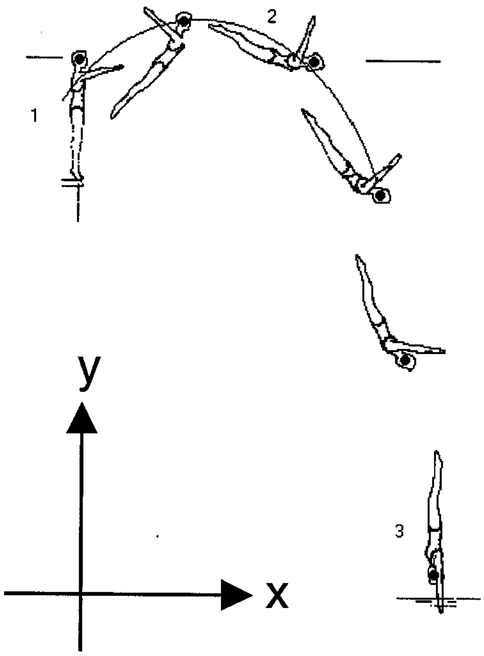


a) Calculez la longueur ***c*** *du flanc du volcan.*
b) Calculez la distance ***d*** *entre la personne et le sommet du volcan.*
c) Calculez la longueur ***L*** *de la coulée de lave.*

2.

...... / 5 pts

La trajectoire de la tête d'un plongeur forme une parabole.
(voir croquis)



Position 1 :

Au départ sur le plongeoir, la tête du plongeur est à 11,6 m au-dessus de l'eau.

Position 2 :

La tête est de nouveau à 11,6 m au-dessus de l'eau lorsqu'elle a fait un déplacement horizontal de 2 m

Position 3 :

La tête rentre dans l'eau à une distance horizontale de 4 m par rapport au plongeoir

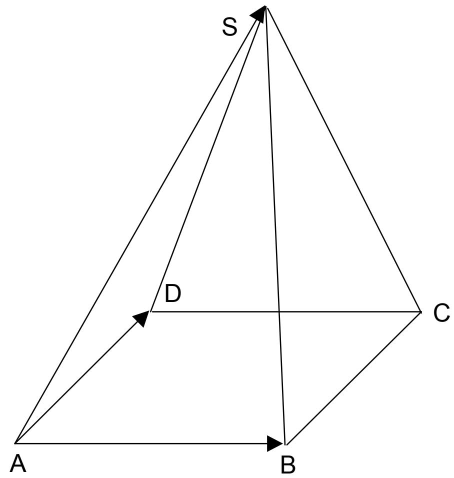
a) Déterminez la fonction correspondant à la trajectoire de la tête.
b) Calculez la hauteur maximale atteinte durant le saut (par rapport au niveau de l'eau)

3.

...... / 6 pts

La pyramide droite ci-contre a comme base un rectangle. Connaissant les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$



a) *Calculez les composantes des vecteurs* $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$.

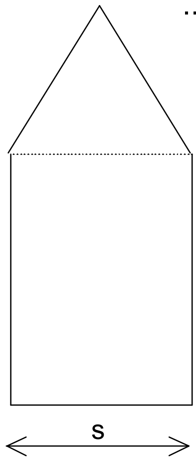
b) *Calculez les longueurs de l'arête AS et de la diagonale AC .*

c) *Calculez l'angle entre l'arête AS et la diagonale AC .*

d) *La pyramide est coupée par le plan passant par A, C et S. Calculez la surface de la section ainsi obtenue.*

4.

...... / 4 pts



La figure ci-contre est formée d'un rectangle et d'un triangle équilatéral. Le périmètre de la figure mesure 10 cm.

a) *Calculez la surface de la figure en fonction du côté* ***s***

b) *Déterminer* ***s*** *pour que la surface soit maximale ?*

5.

...... / 4 pts

Un liquide chaud (75°C) est refroidi en le posant à l'extérieur (température extérieure : 12°C).
La différence de température entre le liquide et l'extérieur va diminuer de façon exponentielle à raison de 7 % par minute.

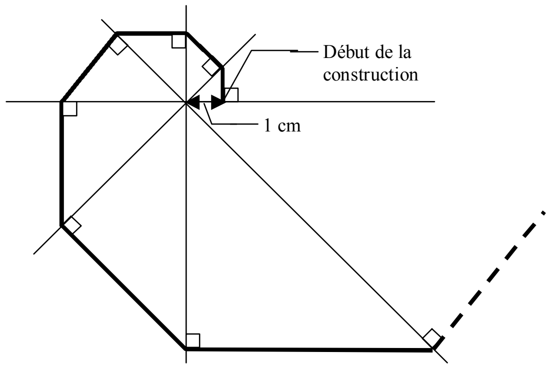
a) Exprimez l'équation correspondant à la température du liquide en fonction du temps
b) Après combien de temps la température du liquide est–elle de 20°C ?

6.

...... / 5 pts

Quatre droites se coupent en un seul point et forment entre elles des angles de 45°.

Une spirale commence sur l'horizontale à 1 cm du point central.
Chaque segment est perpendiculaire à une des droites (voir croquis).
Au total, la spirale a 25 segments.



a) Calculez la longueur totale de la spirale
b) Calculez le rapport entre la somme des 2 plus grands segments et la longueur totale de la spirale.

Partie 2 points : (max.30)

Réponses

Epreuves 2001

Partie 1

1. $S = \{90°;120°;240°;270°\}$
2. $y = -\frac{3}{5}x + 25{,}3$
3. $S = \{2\}$
4. $R_1 = \frac{CR_2}{4\pi\varepsilon R_2 + C}$
5. $S = \left]-3;\frac{3}{2}\right]$

Partie 2

1.
   a) $777{,}9m$
   b) $2643{,}6m$
   c) $260{,}4m$
2.
   a) $f(x) = -1{,}45x^2 + 2{,}9x + 11{,}6$
   b) $13{,}05m$ au dessus de l'eau

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}12\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\6\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix}12\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\4\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-4\\-8\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix}12\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\4\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\\-8\end{pmatrix}$$

b) $AS = \sqrt{7^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{129} = 11.358 \quad ; \quad AC = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180} = 13.416$

c)

$$\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} = AS \cdot AC \cdot \cos\alpha \quad ; \quad \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 7 \cdot 12 + 4 \cdot 6 = 108$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC}}{AS \cdot AC} = \frac{108}{\sqrt{180} \cdot \sqrt{129}} \quad ; \quad \alpha = 44.867°$$

d) $$F = \frac{1}{2} \cdot AS \cdot AC \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{129} \cdot \sqrt{180} \cdot \sin\alpha = 53.749$$

3.

MATHEMATIK 1. TEIL

LÖSUNGEN

1.

....../ 3 Pkte.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung im Intervall $[0°;360°[$:

$$2\cos^2 x + \cos x = 0$$

Lösung:

$2\cos^2 x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\cos x + 1) = 0$

$\cos x = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 90° \quad x_2 = 270°$

$2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow x_3 = 120°; \quad x_4 = 240°$

$L = \{90°, 120°, 240°, 270°\}$

2.

...../ 3 Pkte.

Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der Geraden h, welche senkrecht zur Geraden g: $3y = 5x + 21$ steht und durch den Punkt $P(35; 4.3)$ verläuft.

Lösung:

$g: y = \frac{5}{3}x + 7 \qquad$ Steigung $m_g = \frac{5}{3}$

h: Steigung $m_h = -\frac{3}{5}$, weil $m_g \cdot m_h = -1$

$P(35/4.3)$ in $h: y = -\frac{3}{5}x + b$ einsetzen $\Rightarrow 4.3 = -\frac{3}{5} \cdot 35 + b \Leftrightarrow b = 21 + 4.3 = 25.3$

$h: y = -\frac{3}{5}x + 25.3$

3.

....../ 3 Pkte.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung:

$$1 + \log_2(4 - x) = 2 \cdot \log_2(x)$$

Lösung:

$D =]0; 4[$

$1 + \log_2(4 - x) = 2 \cdot \log_2(x) \quad \Rightarrow 1 = \log_2(x^2) - \log_2(4 - x)$

$\Rightarrow 1 = \log_2\left(\frac{x^2}{4 - x}\right)$

$\Rightarrow 2 = \frac{x^2}{4 - x} \Rightarrow 8 - 2x = x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 4)(x - 2) = 0 \quad x_1 = -4$ Scheinlösung; $\quad x_2 = 2$

$L = \{2\}$

4. ....../ 3 Pkte.

Isolieren Sie R_1 in folgender Formel (Kapazität eines Kugelkondensators):

$$C = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$$

Lösung:

$$C = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^{-1} \Leftrightarrow C = \frac{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \Leftrightarrow \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon}{C} \Leftrightarrow \frac{1}{R_1} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon}{C} + \frac{1}{R_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R_1} = \frac{4\pi\varepsilon R_2 + C}{CR_2} \Leftrightarrow R_1 = \frac{CR_2}{4\pi\varepsilon R_2 + C}$$

5. ....../ 3 Pkte.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichung:

$$\frac{3x-2}{5x+15} \geq \frac{5x-6}{3x+9}$$

Lösung:

D=R \ {-3}

$$\frac{3x-2}{5x+15} \geq \frac{5x-6}{3x+9} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x-2}{5(x+3)} - \frac{5x-6}{3(x+3)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9x-6-(25x-30)}{15(x+3)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{-16x+24}{15(x+3)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3-2x}{x+3} \geq 0$$

		-3		$1{,}5$	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$3-2x$	$+$		$+$	0	$-$
Quotient	$-$	/	$+$	0	$-$

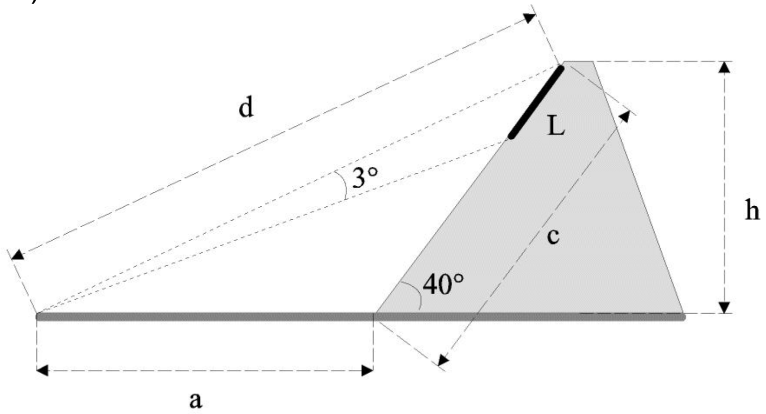
$L = \left] -3\,; 1{,}5 \right]$

MATHEMATIK 2. TEIL

LÖSUNGEN

1. ....../ 6 Pkte.

Eine Person befindet sich in einer Distanz $a = 2000m$ von einem Vulkan. Sie beobachtet einen Lavastrom unter einem Winkel von 3°. Die Höhe des Vulkans beträgt $h = 500m$. Der Vulkanabhang bildet mit der Horizontalen einen Winkel von 40°. (Siehe Skizze)



a) Berechnen Sie die Länge c des Vulkanabhangs.
b) Berechnen Sie die Distanz d zwischen der Person und dem Vulkangipfel.
c) Berechnen Sie die Länge L des Lavastroms.

Lösung:

a) $c = \dfrac{h}{\sin 40°} = \dfrac{500}{\sin 40°} = 777.9m$

b) Kosinussatz im Dreieck mit den Seiten a, c et d

$d^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos 140°$

$d = \sqrt{2000^2 + 777.9^2 - 2 \cdot 2000 \cdot 777.9 \cdot \cos 140°}$; $d = 2643{,}6m$

c)

$\dfrac{c}{\sin\beta} = \dfrac{d}{\sin 140°} \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{c}{d}\sin 140° \Rightarrow \quad \beta = 10{,}9° \Rightarrow \alpha = \beta - 3° = 7.9°$

$\gamma = 180° - \alpha - 140° = 32.1°$

$\dfrac{c'}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{\sin\gamma} \Rightarrow c' = \dfrac{a \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} = \dfrac{2000 \cdot \sin 7.9°}{\sin 32.1°} = 517.5m$

$L = c - c' = 777.9 - 517.3 = 260.4m$

2.

......./ 5 Pkte.

Die Flugbahn des Kopfes eines Wasserspringers ist eine Parabel 2. Grades. (Siehe nebenstehende Skizze)

Position 1:
Wenn der Springer auf dem Sprungbrett ist, befindet sich sein Kopf 11,6 m über dem Wasser.

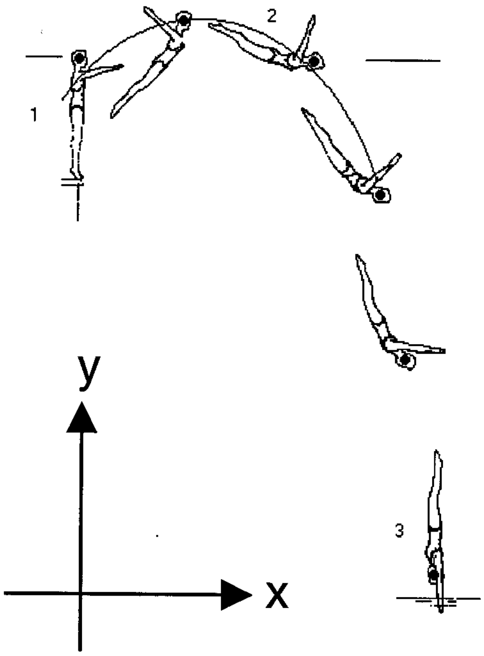
Position 2:
Der Kopf erreicht erneut die Ausgangshöhe der Position 1 in einer horizontalen Entfernung von 2 m vom Ausgangspunkt.

Position 3:
Der Kopf tritt schliesslich in einer horizontalen Entfernung von 4 m vom Sprungbrett ins Wasser ein.

Berechnen Sie

a) die Funktionsgleichung, die dem Graphen der Flugbahn entspricht.

b) die maximal erreichte Höhe beim Sprung bezüglich des Wasserspiegels.



Lösung:

Ansatz : $f(x) = ax^2 + bx + c$

3 Punkte in Ansatz einsetzen $P_1(0\,;11.6)$ $P_2(2\,;11.6)$ $P_3(4\,;0)$

$$\begin{aligned} c &= 11.6 \quad (1) \\ 4a + 2b + c &= 11.6 \quad (2) \quad \Rightarrow \quad a = -1.45, \quad b = 2.9 \quad c = 11.6 \\ 16a + 4b + c &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Funktionsgleichung der Flugbahn : $f(x) = -1.45x^2 + 2.9x + 11.6$

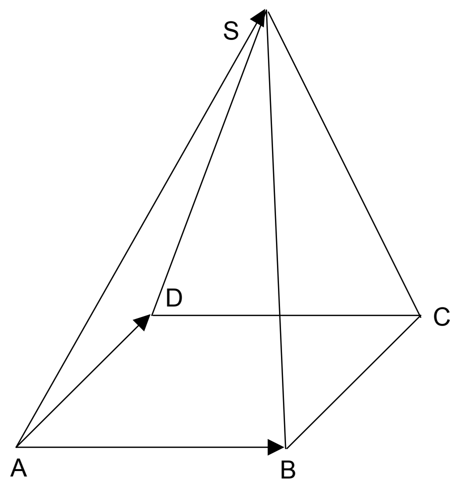
Nullstellen : $-1.45x^2 + 2.9x + 11.6 = 0$ $x_1 = -2$ $x_2 = 4$

Maximum : $x_m = 1$ $f(1) = 13.05$ $M(1;13.05)$

Maximale Höhe : 13.05m über dem Wasser

3.

....../ 6 Pkte.



Die gezeichnete schiefe Pyramide hat als Grundfläche ein Rechteck. Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{AS}$ sind gegeben.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$. (Komponentendarstellung)

b) Berechnen Sie die Kantenlänge AS und die Diagonalenlänge AC.

c) Berechnen Sie den Winkel zwischen der Seitenkante AS und der Flächendiagonale AC.

d) Die Pyramide soll durch einen Schnitt, der durch die Punkte A, C und S geht, geteilt werden. Berechnen Sie die Schnittfläche, die so entsteht.

Lösung:

a)

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

b) $AS = \sqrt{7^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{129} = 11.358 \quad ; \quad AC = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180} = 13.416$

c)

$$\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} = AS \cdot AC \cdot \cos\alpha \quad ; \quad \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 7 \cdot 12 + 4 \cdot 6 = 108$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC}}{AS \cdot AC} = \frac{108}{\sqrt{180} \cdot \sqrt{129}} \quad ; \quad \alpha = 44.867°$$

d) $F = \frac{1}{2} \cdot AS \cdot AC \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{129} \cdot \sqrt{180} \cdot \sin\alpha = 53.749$

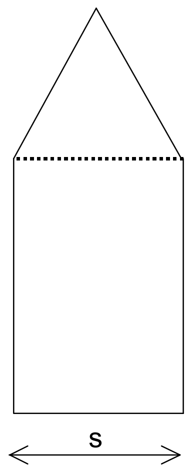
4.

......./ 4 Pkte.

Die nebenstehende Figur (Skizze) ist zusammengesetzt aus einem Rechteck und einem gleichseitigen Dreieck. Der Umfang der Figur beträgt 10 cm.

a) Berechnen Sie die Fläche der Figur in Abhängigkeit von der Breite s des Rechtecks.

b) Berechnen Sie s so, dass die Fläche der Figur maximal wird?



Lösung:

a)

$$A = A_{\text{Rechteck}} + A_{\text{Dreieck}}\,; \quad A_{\text{Rechteck}} = s \cdot \frac{10-3s}{2}; \quad A_{\text{Dreieck}} = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$$

$$A = -\frac{3}{2}s^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 + 5s = \frac{\sqrt{3}-6}{4}s^2 + 5s \cong -1.067s^2 + 5s$$

Nullstellen:

b) $$\frac{\sqrt{3}-6}{4}s^2 + 5s = 0 \Leftrightarrow s\left(\frac{\sqrt{3}-6}{4}s + 5\right) = 0 \Rightarrow s_1 = 0\,;\, s_2 = \frac{20}{6-\sqrt{3}} = 4.686$$

$$\text{Scheitel: } \quad s_{Scheitel} = \frac{s_2}{2} = \frac{10}{6-\sqrt{3}} = 2.343$$

5.

......./ 4 Pkte.

Heisse Flüssigkeit (Temperatur 75°C) wird zur Abkühlung nach draussen gestellt (Aussentemperatur der Luft 12°C). Der Temperaturunterschied zwischen Flüssigkeit und Luft nimmt exponentiell mit der Zeit ab und zwar um 7% pro Minute.

a) Stellen Sie die Funktionsgleichung auf, welche die Flüssigkeitstemperatur in Funktion der Zeit beschreibt.

b) Nach welcher Zeit ist die Flüssigkeit noch 20°C warm?

Lösung:

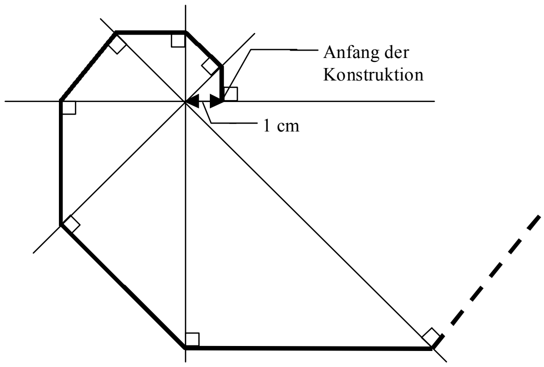
a) $T(t) = 12° + 63° \cdot 0.93^t$ (t: Minuten)

b) $$20° = 12° + 63° \cdot 0.93^t \Leftrightarrow 8 = 63 \cdot 0.93^t \Leftrightarrow \frac{8}{63} = 0.93^t \Leftrightarrow t = \frac{\lg\frac{8}{63}}{\lg 0.93} = 28.4\ \mathit{Min}$$

6.

....../ 5 Pkte.

Vier Geraden, die zueinander je einen Winkel von 45° bilden, schneiden sich in einem Punkt O.
Eine Spirale beginnt auf der horizontalen Gerade in einer Entfernung von 1 cm vom Punkt O. Jedes Segment der Spirale liegt senkrecht zur seiner Ausgangsgeraden. Die Spirale hat 25 Segmente. (siehe Skizze)



a) Berechnen Sie die Gesamtlänge dieser Spirale.
b) Wieviel Prozent der Gesamtlänge der Spirale macht die Summe der beiden grössten Segmente aus?

Lösung:

Berechnung der 5 ersten Segmente (gleichschenklige Dreiecke):

$a_1 = 1 \quad a_2 = \sqrt{2} \quad a_3 = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2 \quad a_4 = 2\sqrt{2} \quad a_5 = 2\sqrt{2}\sqrt{2} = 4$

Geometrische Folge mit $a_1 = 1$ und $q = \sqrt{2}$

Totale Länge der Spirale: $s_{25} = a_1 \dfrac{q^{25}-1}{q-1} = 1 \cdot \dfrac{\sqrt{2}^{25}-1}{\sqrt{2}-1} = 13982\,cm = 139.82\,m$

Länge der 2 letzten Segmente:

$a_{24} + a_{25} = a_1 q^{23} + a_1 q^{24} = \sqrt{2}^{23} + \sqrt{2}^{24} = 6992\,cm = 69.92\,m$

Verhältnis: $\dfrac{a_{24} + a_{25}}{s_{25}} = 50\%$

CANTON DE FRIBOURG / KANTON FREIBURG

Office cantonal de la formation professionnelle
Kantonales Amt für Berufsbildung

ECOLE PROFESSIONNELLE SUPERIEURE EPS
MATURITE PROFESSIONNELLE TECHNIQUE

EXAMEN FINAL 2002

No. du candidat :

Nom et prénom ....:Profession :......................................

MATHEMATIQUES
2002

L'épreuve des mathématiques est constituée de deux parties:

Partie 1	sans calculatrice ni formulaire d'une durée de 40 minutes
Partie 2	avec calculatrice et formulaire d'une durée de 80 minutes.

Consigne : Les réponses sans développement ne sont pas valables

Partie 1	points :		(max.15)
Partie 2	points :		(max. 30)

TOTAL (max. 45)

$$\text{note} = \frac{\text{nombres de points}}{45} \cdot 5 + 1 \quad \text{(arrondie au demi)}$$

NOTE

Expert enseignant : ______________________ **2e expert :** ____________

Date : ______________________ **Date :** ____________

Nom et prénom:	Profession: ....

Question 1 ... / 3 pts

Résoudre l'équation

$$\frac{10}{\sqrt{x}+\sqrt{x-5}}+\frac{10}{\sqrt{x}-\sqrt{x-5}}=3\sqrt{x+7}$$

Question 2 … / 5 pts

Soit les fonctions : $f(x) = x^2 - 4x - 5$ et $g(x) = \frac{3}{2}x - 2$.

a) Tracer le graphe de $f(x)$. Calculer pour cela ses points d'intersection avec les axes ainsi que son sommet.

b) Tracer le graphe de $g(x)$.

c) Calculer les coordonnées des points d'intersection des deux graphes.

d) On effectue une translation du graphe de $f(x)$ pour amener son sommet en S(-2; 3). Déterminer la fonction $h(x)$ correspondant à ce graphe.

Question 3 ... / 3 pts

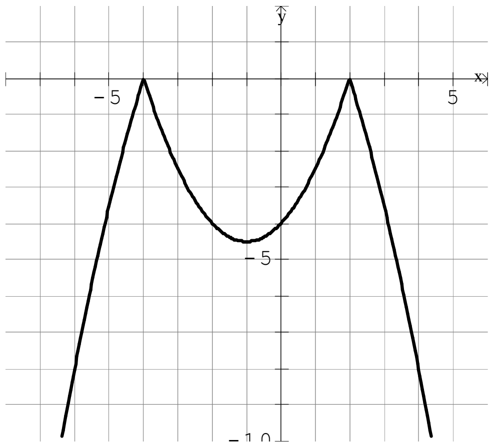
Résoudre l'équation

$$\log_2\left(x^4 - 17\right) = 6$$

Question 4 ... / 4 pts

a) Déterminer la fonction du 2$^{\text{ème}}$ degré dont le graphe passe par les trois points (0; -4), (-4;0) et (2;0).

b) Modifier la fonction trouvée sous a) pour que son graphe soit celui illustré ci-dessous.



Nom et prénom: .... Profession: ....

Question 1 ... / 4 pts

Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} \dfrac{5}{(m+1)^2} + \dfrac{12}{1-n} = 2 \\ \dfrac{9}{(m+1)^2} - \dfrac{20}{1-n} = 1 \end{cases}$$

Question 2 … / 4 pts

Soit le système d'inéquations :

$$\begin{cases} x+3>0 \\ 2x-3y+9>0 \\ x+3y-27<0 \end{cases}$$

a) Représenter graphiquement les solutions de ce système.
b) Calculer les coordonnées des sommets de la surface trouvée sous a).

Question 3 ... / 4 pts

Un avion relie les villes de Zürich et Madrid distantes de 1320 km. Lorsqu'il vole avec un vent arrière de 60 km/h son trajet est écourté de 12 minutes.
Calculer la vitesse propre de l'avion. (toutes les vitesses sont constantes).

Question 4 ... / 5 pts

Gaston a 1000.-. Le premier jour il dépense 10.-. Puis il dépense chaque jour 10% de plus que le jour précédent (c'est-à-dire 11.-, 12.10 …).
Après combien de jours aura-t-il dépensé tout son argent ?
Remarque : Ne pas arrondir les sommes dépensées chaque jour.

Question 5 … / 3 pts

Résoudre l'équation suivante dans l'intervalle $[0°;360°[$ ou $[0;2\pi[$ (à choix) :

$$\tan x - 2\sin x \tan x = 0$$

Question 6 … / 5 pts

Un triangle a pour côtés a = 2,2 cm; b = 4,1 cm et c = 5 cm.

a) Calculer les angles du triangle.

b) Le triangle subit une rotation de 360° autour de son plus grand côté. Calculer le volume du corps ainsi obtenu.

Question 7 … / 5 pts

Un quadrilatère ABCD est donné par ses quatre sommets :

A(1;0;0) B(1;-2;1) C(7;1;7) D(5;2;4).

a) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$.
b) Montrer que le quadrilatère a un angle droit en A.
c) Montrer que les côtés AD et BC sont parallèles.
d) Calculer l'angle en C du quadrilatère.

Question 1 … /3 pts

Résoudre l'équation

$$\frac{10}{\sqrt{x}+\sqrt{x-5}}+\frac{10}{\sqrt{x}-\sqrt{x-5}}=3\sqrt{x+7}$$

Solution :

$$\frac{10}{\sqrt{x}+\sqrt{x-5}}+\frac{10}{\sqrt{x}-\sqrt{x-5}}=3\sqrt{x+7}$$

$$\frac{10\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-5}\right)+10\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-5}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-5}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-5}\right)}=3\sqrt{x+7}$$

$$\frac{20\sqrt{x}}{x-(x-5)}=3\sqrt{x+7}$$

$$20\sqrt{x}=15\sqrt{x+7}$$

$$4\sqrt{x}=3\sqrt{x+7}$$

$$16x=9(x+7)$$

$$x=9$$

Vérification OK :

$$MG:\frac{10}{\sqrt{9}+\sqrt{9-5}}+\frac{10}{\sqrt{9}-\sqrt{9-5}}=\frac{10}{\sqrt{9}+\sqrt{9-5}}+\frac{10}{\sqrt{9}-\sqrt{9-5}}=\frac{10}{5}+\frac{10}{1}=12$$

$$MD:3\sqrt{9+7}=12$$

$$S=\{9\}$$

Question 2 … / 5 pts

Soit les fonctions : $f(x) = x^2 - 4x - 5$ et $g(x) = \frac{3}{2}x - 2$.

e) Tracer le graphe de $f(x)$. Calculer pour cela ses points d'intersection avec les axes ainsi que son sommet.

f) Tracer le graphe de $g(x)$.

g) Calculer les coordonnées des points d'intersection des deux graphes.

h) Déterminer la fonction $h(x)$ dont le graphe a la même forme que celui de $f(x)$ mais dont le sommet est en S(-2; 3).

Solution:

a) Le graphe est une parabole avec :

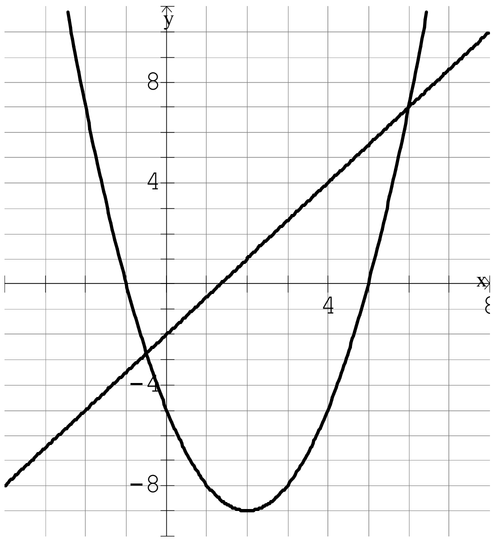
Sommet S(2;-9) $x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$

Sur l'axe des y : (0;-5)

Sur l'axe des x : (-1;0) et (5;0) :

$$f(x) = x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1) = 0 \text{ si x = -1 ou x = 5}$$

b) Deux points de la droite : (0;-2) et (2;1)



c) $x^2 - 4x - 5 = \frac{3}{2}x - 2$

$x^2 - 5.5x - 3 = 0$

$2x^2 - 11x - 6 = 0$

$\Delta = 121 + 4 \cdot 2 \cdot 6 = 169 = 13^2$

$x_{1,2} = \frac{11 \pm 13}{4} =< \begin{matrix} 6 \\ -0.5 \end{matrix}$

Les deux points d'intersection sont (6;7) et (-0.5;-2.75)

d) La fonction est

$f(x) = (x+2)^2 + 3 = x^2 + 4x + 7$

Question 3 ... / 3 pts

Résoudre l'équation

$$\log_2\left(x^4 - 17\right) = 6$$

Solution:

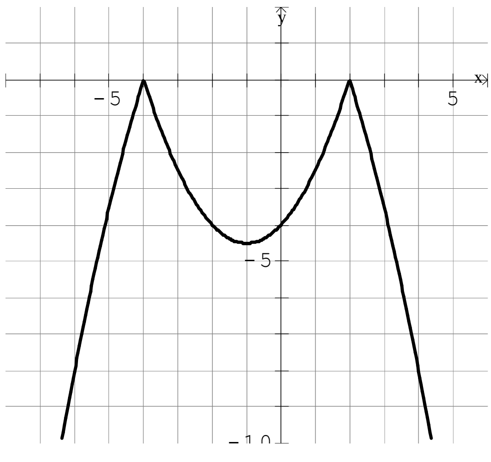
$$\log_2\left(x^4 - 17\right) = 6$$
$$x^4 - 17 = 2^6 = 64$$
$$x^4 = 81$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm 3$$

Les deux solutions sont possibles. $S = \{\pm 3\}$

Question 4 ... /4 pts

c) Déterminer la fonction du 2[ème] degré dont le graphe passe par les trois points (0; -4), (-4;0) et (2;0).

d) Modifier la fonction trouvée sous a) pour que son graphe soit celui illustré ci-dessous.



Solution:

a) La fonction est du type $y = ax^2 + bx + c$

Etant donné les trois points du graphe:

$$\begin{cases} -4 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c \\ 0 = a(-4)^2 + b(-4) + c \\ 0 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -4 \\ 0 = 16a - 4b - 4 \\ 0 = 4a + 2b - 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = -4 \\ 0 = 4a - b - 1 \\ 0 = 2a + b - 2 \end{cases}$$

III : $b = 2 - 2a$ dans II : $4a - 2 + 2a - 1 = 0$ $\quad a = \frac{1}{2}$ $\quad b = 1$

La fonction est $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

b) La fonction est $y = -\left|\frac{1}{2}x^2 + x - 4\right|$

Question 1 … / 4 pts

Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} \dfrac{5}{(m+1)^2} + \dfrac{12}{1-n} = 2 \\ \dfrac{9}{(m+1)^2} - \dfrac{20}{1-n} = 1 \end{cases}$$

Solution :

Substitution : $x = \dfrac{1}{(m+1)^2}$ $\quad y = \dfrac{1}{1-n}$

Le système devient : $\begin{cases} 5x + 12y = 2 \\ 9x - 20y = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 25x + 60y = 10 \\ 27x - 60y = 3 \end{cases}$ $\qquad 52x = 13 \qquad x = \dfrac{1}{4} \quad y = \dfrac{1}{12}\left(2 - 5 \cdot \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{16}$

$x = \dfrac{1}{(m+1)^2} = \dfrac{1}{4} \qquad (m+1)^2 = 4 \quad m+1 = \pm 2 \qquad m_1 = 1 \quad m_2 = -3$

$y = \dfrac{1}{1-n} = \dfrac{1}{16} \qquad 1 - n = 16 \qquad n = -15$

$$S = \{(1;-15);(-3;-15)\}$$

Question 2 … / 4 pts

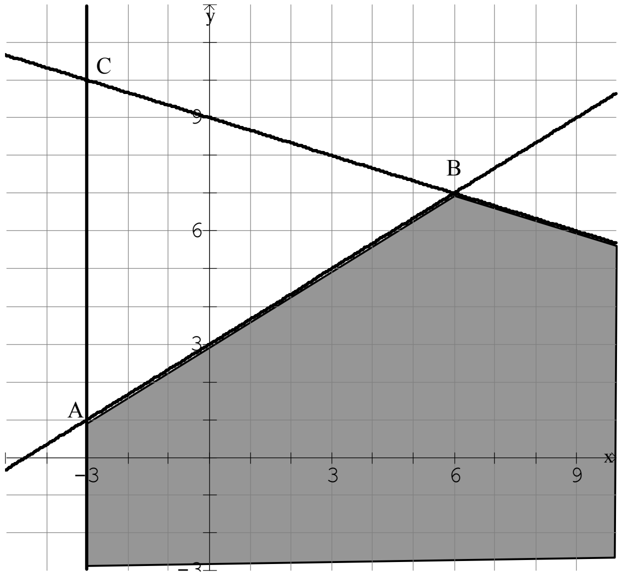
Soit le système d'inéquations :

$$\begin{cases} x+3>0 \\ 2x-3y+9>0 \\ x+3y-27<0 \end{cases}$$

c) Représenter graphiquement les solutions de ce système.
d) Calculer les coordonnées des sommets de la surface trouvée sous a).

Solution :

$$\begin{cases} x>-3 \\ y<\frac{2}{3}x+3 \\ y<-\frac{1}{3}x+9 \end{cases}$$



Sommets :

A(-3 ;1) C(-3 ;10) (pas demandé) car ces 2 points sont sur la droite x = -3

B(6 ;7) :

$\frac{2}{3}x+3=\frac{-1}{3}x+9 \qquad x=6 \quad y=\frac{2}{3}6+3=7$

Question 3 … / 4 pts

Un avion relie les villes de Zürich et Madrid distantes de 1320 km. Lorsqu'il vole avec un vent arrière de 60 km/h son trajet est écourté de 12 minutes.
Calculer la vitesse propre de l'avion. (toutes les vitesses sont constantes).

Solution :

Soit v la vitesse propre de l'avion en km/h et
t le temps initialement prévu pour le trajet en h.

$$\begin{cases} 1320 = vt \\ 1320 = (v+60)(t-0.2) \end{cases} \qquad \begin{cases} 1320 = vt \\ 1320 = vt + 60t - 0.2v - 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1320 = vt \\ 60t = 0.2v + 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1320}{v} = t \\ 60\dfrac{1320}{v} = 0.2v + 12 \end{cases}$$

$$0.2v^2 + 12v - 79200 = 0$$

$$\Delta = 12^2 + 4 \cdot 0.2 \cdot 79200 = 63504 = 252^2$$

$$v_{1,2} = \frac{-12 \pm 252}{2 \cdot 0.2} < \begin{matrix} -660 \\ 600 \end{matrix}$$

La vitesse propre de l'avion est de 600 km/h.

Question 4 … / 5 pts

Gaston a 1000.-. Le premier jour il dépense 10.-. Puis il dépense chaque jour 10% de plus que le jour précédent (11.-, 12.10 …). Après combien de temps aura-t-il dépensé tout son argent ?

Solution :

Les sommes dépensées chaque jour forment une suite géométrique de raison 1.1 et de premier terme 10.

On veut trouver n tel que $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq 1000$.

$$s_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} = 10\frac{1.1^n - 1}{1.1 - 1} = 1000$$

$$10 = 1.1^n - 1$$

$$11 = 1.1^n$$

$$n = \log_{1.1} 11 = \frac{\log 11}{\log 1.1} = 25.15$$

Il finit de dépenser son argent le 26ème jour.

Question 5 ... / 3 pts

Résoudre l'équation suivante dans l'intervalle $[0°;360°[$ ou $[0;2\pi[$ (à choix) :

$$\tan x - 2\sin x \tan x = 0$$

Solution :

$$\tan x - 2\sin x \tan x = 0$$
$$\tan x(1 - 2\sin x) = 0$$

$\tan x = 0$ $\quad x = 0°$ $\quad x = 180°$

$\sin x = \frac{1}{2}$ $\quad x = 30°$ $\quad x = 150°$

$S = \{0°;30°;150°;180°\}$

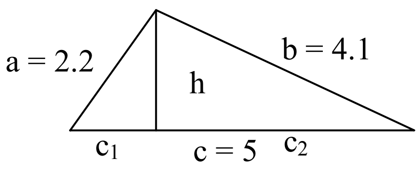
Question 6 **… / 5 pts**

Un triangle a pour côtés a = 2,2 cm; b = 4,1 cm et c = 5 cm.

c) Calculer les angles du triangle.

d) Le triangle subit une rotation autour de son plus grand côté. Calculer le volume du corps ainsi obtenu.

Solution :



Théorème du cosinus :

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2.2^2 + 4.1^2 - 5^2}{2 \cdot 2.2 \cdot 4.1} = -0.19 \qquad \gamma = 100.70°$$

$$\cos\alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 4.1^2 - 2.2^2}{2 \cdot 5 \cdot 4.1} = 0.90 \qquad \alpha = 25.62°$$

$$\beta = 180° - \alpha - \gamma = 53.68°$$

Le corps est un double cône.

Le rayon de sa base est $h = a\sin\beta = 2.2\sin 53.68° = 1.77$

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 c_1 + \frac{1}{3}\pi h^2 c_2 = \frac{1}{3}\pi h^2 (c_1 + c_2) = \frac{1}{3}\pi h^2 c = \frac{1}{3}\pi 1.77^2 \cdot 5 = 16.40 cm^3$$

Question 7 … / 5 pts

Un quadrilatère ABCD est donné par ses quatre sommets :

A(1;0;0) B(1;-2;1) C(7;1;7) D(5;2;4).

e) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$.
f) Montrer que le quadrilatère a un angle droit en A.
g) Montrer que les côtés AD et BC sont parallèles.
h) Calculer l'angle en C du quadrilatère.

Solution :

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ -2-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 2-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ 1-(-2) \\ 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 - 4 + 4 = 0$

c) $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AD}$

d) $\cos\gamma = \dfrac{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{CD}\right\|} = \dfrac{\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{81}\sqrt{14}} = \dfrac{12 - 3 + 18}{9\sqrt{14}} = 0.80$ $\gamma = 36.70°$

ECOLE DES METIERS FRIBOURG
LEHRWERKSTÄTTE FREIBURG

MATURITE PROFESSIONNELLE TECHNIQUE — EXAMEN FINAL 2003
TECHNISCHE BERUFSMATURA — ABSCHLUSSPRÜFUNG 2003

23 mai 2003 — *3IAm / 4° MPT / 5° MPT post-CFC*

Heure de convocation 08 h 00 — **Début de l'examen 08 h 10**

Nom, prénom : .... Classe : .... N° : ....

MATHEMATIQUES

L'examen de mathématiques est constitué de 2 parties :

1° partie : durée : 40 minutes 08 h 10 à 08 h 50

Les machines à calculer et les formulaires ne sont pas autorisés.

2° partie : durée : 80 minutes 09 h 00 à 10 h 20

Les machines à calculer et les formulaires sont autorisés.

Remarques :
- Les réponses sans développement ne sont pas valables.
- Si vous manquez de place, poursuivez au dos de la page précédente.
- La présentation doit être soignée.

Evaluation : $\frac{\text{(nombre de points)}}{45} \cdot 5 + 1 = \text{note}$ (arrondie au demi)

Points de la 1° partie : .... / 15

Points de la 2° partie : .... / 30

Total des points :..........

NOTE : ....

Surveillants de l'épreuve :
Experts (professeurs) :

Nom, prénom : .... Classe : .... N° : ....

PARTIE 1

Question 1 … / 3 pts

Simplifier l'expression : $\dfrac{\sqrt[3]{y^2}\cdot\sqrt[3]{x^4 y}+\left(x^2 y^4\right)^{\frac{1}{3}}}{y\cdot\sqrt{x}\cdot x^{\frac{1}{6}}} =$

Question 2 ... / 4 pts

Résoudre l'équation : $\frac{x-4}{x-5}=\frac{30-x^2}{x^2-5x}$

Question 3 ... / 3 pts

Résoudre l'équation : $\log_2\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)=2$

Question 4 … / 5 pts

Soit les fonctions : $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$ et $g(x) = \dfrac{x}{3} + 2$.

i) Représenter les 2 fonctions en mentionnant les asymptotes et les points d'intersection avec les axes des x et des y.

j) Calculer et représenter les points d'intersection des deux graphes.

Nom, prénom : .... Classe : .... N° : ....

PARTIE 2

Question 1 ... / 6 pts

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{2}-4$ (unité : cm)

Le graphe de cette fonction coupe l'axe des x en deux points : X_1 et X_2. Ces deux points sont les deux premiers sommets d'un triangle. Le troisième sommet P du triangle est sur la parabole au-dessous de l'axe des x.

Déterminer les coordonnées de P pour que la surface du triangle X_1X_2P soit de 8 cm^2.

Question 2 … / 4 pts

Résoudre l'équation suivante dans l'intervalle [0° ; 360° [:

$$2\sin^2 x = 3\cos x$$

Question 3 … / 6 pts

Une forêt A croît exponentiellement de 4% tous les 7 mois, le 1.1.1990 on est en présence de 10'000 m^3 de bois.
Une forêt B est malade et décroît exponentiellement de 5% tous les 4 mois, le 1.1.1992 on est en présence de 30'000 m^3 de bois.

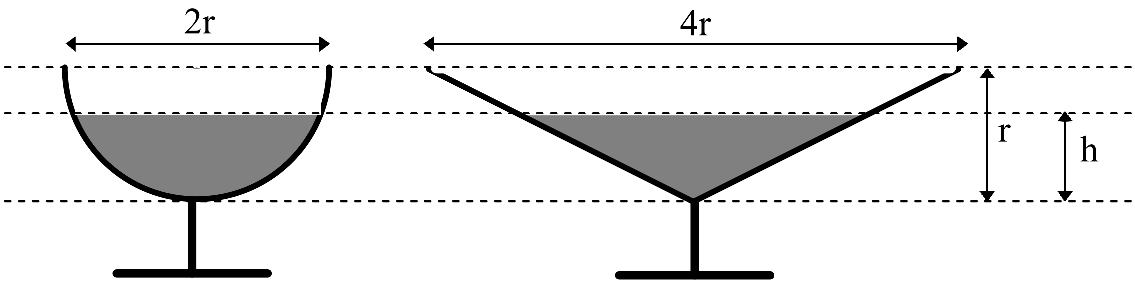
e) Calculer la grandeur des 2 forêts le 1.1.2002.
f) Quand les deux forêts ont-elles la même grandeur ?

Question 4 … / 6 pts

A un apéritif, les boissons sont servies dans des verres à pied, les uns coniques, les autres hémisphériques.
On remplit tous les verres à la même hauteur h.
Déterminer cette hauteur h (en fonction de r) pour que tous les verres contiennent la même quantité de boisson.

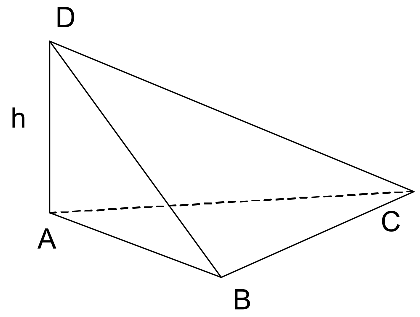
Les dimensions des verres, sans le pied, sont :

Verres coniques : hauteur r et diamètre $4r$
Verres hémisphériques : rayon r



Question 5 … / 4 pts

D est le sommet d'une montagne de hauteur h ayant comme base horizontale le triangle ABC.



On connaît : $BC = 8$ km
$AC = 14$ km
γ = angle $BCA = 45°$
β = angle $ABD = 18°$

a) Calculer la hauteur h.
b) Calculer la surface horizontale ABC.

Question 6 … / 4 pts

$\mathbf{d_1}$ est la droite du plan passant par A(3 ; -5) et B(8 ; 3).

$\mathbf{d_2}$ est la droite du plan passant par A et ayant la direction du vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Représenter ces deux droites et calculer l'angle entre elles.

Nom, prénom : .... Classe : .... N° : ....

PARTIE 1

Question 1 … / 3 pts

Simplifier l'expression : $\dfrac{\sqrt[3]{y^2}\cdot\sqrt[3]{x^4 y}+\left(x^2 y^4\right)^{\frac{1}{3}}}{y\cdot\sqrt{x}\cdot x^{\frac{1}{6}}}=$

$$\frac{\sqrt[3]{y^2}\cdot\sqrt[3]{x^4 y}+\left(x^2 y^4\right)^{\frac{1}{3}}}{y\cdot\sqrt{x}\cdot x^{\frac{1}{6}}}=\frac{y^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}}{y\cdot x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{6}}}$$

$$=\frac{yx^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}}{y\cdot x^{\frac{2}{3}}}=\frac{yx^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}yy^{\frac{1}{3}}}{y\cdot x^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}+\frac{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y}$$

Question 2 … / 4 pts

Résoudre l'équation : $\frac{x-4}{x-5} = \frac{30-x^2}{x^2-5x}$

$$\frac{x-4}{x-5} = \frac{30-x^2}{x^2-5x} \qquad ED = R - \{0;5\}$$

$$\frac{x-4}{x-5} = \frac{30-x^2}{x(x-5)}$$

$$\frac{x(x-4)}{x(x-5)} = \frac{30-x^2}{x(x-5)}$$

$$x(x-4) = 30 - x^2$$

$$2x^2 - 4x - 30 = 0$$
$$x^2 - 2x - 15 = 0 \qquad (\Delta = 64)$$
$$(x-5)(x+3) = 0$$
$x_1 = 5$ A éliminer $\notin$ ED

$x_2 = -3$ *OK* $S = \{-3\}$

Question 3 … / 3 pts

Résoudre l'équation : $\log_2\left(\frac{2x+3}{x+1}\right) = 2$

$$\log_2\left(\frac{2x+3}{x+1}\right) = 2$$
$$\frac{2x+3}{x+1} = 2^2$$

$$4(x+1) = 2x+3$$
$$2x = -1$$
$$x = -0.5$$
Vérification : $\log_2\left(\frac{2(-0.5)+3}{-0.5+1}\right) = \log_2\left(\frac{2}{0.5}\right) = \log_2 4 = 2$ *OK* $S = \{-0.5\}$

Question 4 … / 5 pts

Soit les fonctions : $f(x)=\dfrac{3x+2}{x-1}$ et $g(x)=\dfrac{x}{3}+2$

k) Représenter les 2 fonctions en mentionnant les asymptotes et les points d'intersection avec les axes des x et des y.

l) Calculer et représenter les coordonnées des points d'intersection des deux graphes.

$f(x)=\dfrac{3x+2}{x-1}$: **hyperbole**

Point sur l'axe des x : $\dfrac{3x+2}{x-1}=0 \qquad 3x+2=0 \qquad x=\dfrac{-2}{3} \qquad \left(\dfrac{-2}{3};0\right)$

Point sur l'axe des y : $f(0)=\dfrac{3\cdot 0+2}{0-1}=-2 \qquad (0;-2)$

Asymptote verticale : x = 1 : zéro du dénominateur

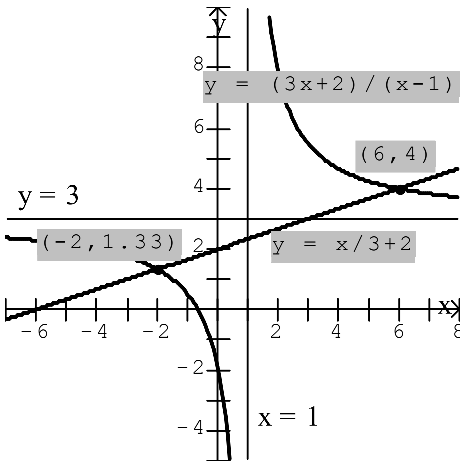
Asymptote horizontale : y = 3 $\quad f(x)=\dfrac{3x+2}{x-1}\xrightarrow{x\to\pm\infty}\dfrac{3x}{x}=3$

$g(x)=\dfrac{x}{3}+2$: **droite**

Point sur l'axe des x : $\dfrac{x}{3}+2=0 \qquad x=-6 \qquad (-6;0)$

Point sur l'axe des y : $g(0)=\dfrac{0}{3}+2=2 \qquad (0;2)$

Intersections des deux graphes : $(6;4) \quad \left(-2;\dfrac{4}{3}\right)$



$$\frac{3x+2}{x-1}=\frac{x}{3}+2$$

$$3(3x+2)=x(x-1)+6(x-1)$$

$$x^2-4x-12=0 \qquad (\Delta=16+48=64)$$

$$(x-6)(x+2)=0$$

$x_1=6 \quad y_1=\dfrac{6}{3}+2=4 \qquad (6;4)$

$x_2=-2 \qquad y_1=\dfrac{-2}{3}+2=\dfrac{4}{3} \qquad \left(-2;\dfrac{4}{3}\right)$

Nom, prénom : .... Classe : .... N° : ....

PARTIE 2

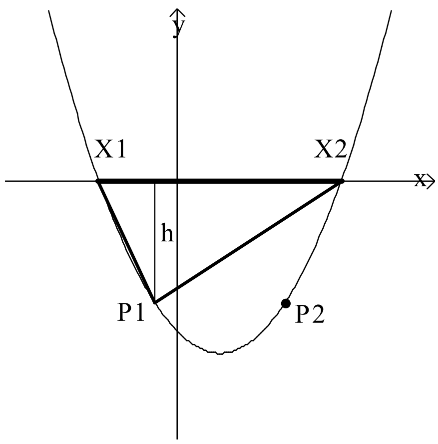
Question 1 ... / 6 pts

Soit la fonction $f(x)=\frac{(x-1)^2}{2}-4$ (unité : cm)

Le graphe de cette fonction coupe l'axe des x en deux points : X_1 et X_2. Ces deux points sont les deux premiers sommets d'un triangle. Le troisième sommet P du triangle est sur la parabole au dessous de l'axe des x.

Déterminer les coordonnées de P pour que la surface du triangle X_1X_2P soit de 8 cm^2

Calcul de X_1 et X_2 :



$$\frac{(x-1)^2}{2}-4=0$$

$$(x-1)^2=8$$

$$x-1=\pm\sqrt{8}$$

$$x=1\pm 2\sqrt{2}=\begin{matrix}3.83\\-1.83\end{matrix}$$

$$X_1\left(1-2\sqrt{2};0\right)\quad X_2\left(1+2\sqrt{2};0\right)$$

Distance entre ces deux points

$$1+2\sqrt{2}-\left(1-2\sqrt{2}\right)=4\sqrt{2}=5.66$$

Hauteur h du triangle:

$$aire=8=\frac{4\sqrt{2}\cdot h}{2}=2\sqrt{2}\cdot h$$

$$h=\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

Le point P a pour $2^{ème}$ coordonnée $-2\sqrt{2}$.

$$\frac{(x-1)^2}{2}-4=-2\sqrt{2}$$

$$0.5x^2-x-3.5=-\sqrt{8}$$

$$0.5x^2-x-\left(3.5-\sqrt{8}\right)=0$$

$$\Delta=1+4\cdot 0.5\cdot\left(3.5-\sqrt{8}\right)=8-2\sqrt{8}$$

$$x=1\pm\sqrt{8-2\sqrt{8}}=\begin{matrix}2.53\\-0.53\end{matrix}$$

$$P_1(-0.53;-2.83)\qquad P_2(2.53;-2.83)$$

Question 2 ... / 4 pts

Résoudre l'équation suivante dans l'intervalle [0° ; 360° [:

$$2\sin^2 x = 3\cos x$$
$$2\left(1-\cos^2 x\right) = 3\cos x$$
$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$
$$\Delta = 9 + 4\cdot 2\cdot 2 = 25$$

$$\cos x = \frac{-3\pm 5}{4} = \begin{matrix} -2 & \textit{impossible} \\ 0.5 & x = 60° \;\textit{ou}\; 300° \end{matrix}$$

$$S = \{60°;300°\}$$

Question 3 ... / 6 pts

Une forêt A croît exponentiellement de 4% tous les 7 mois, le 1.1.1990 on est en présence de 10'000 m^3 de bois.
Une forêt B est malade et décroît exponentiellement de 5% tous les 4 mois, le 1.1.1992 on est en présence de 30'000 m^3 de bois.

g) Calculer la grandeur des 2 forêts le 1.1.2002
h) Quand les deux forêts ont-elles la même grandeur ?

a) 1.1.90 -> 1.1.2002 : 12 ans = 144 mois

Forêt A le 1.1.2002 : $10000\cdot 1.04^{\frac{144}{7}} = 22407.85 m^3$

1.1.92 -> 1.1.2002 : 10 ans = 120 mois

Forêt B le 1.1.2002 : $30000\cdot 0.95^{\frac{120}{4}} = 6439.16 m^3$

b) t désigne le temps en **mois**. t = 0 le 1.1.199**0**.

Forêt A au temps t : $A(t) = 10000\cdot 1.04^{\frac{t}{7}}$

Forêt B au temps t : $B(t) = 30000\cdot 0.95^{\frac{t-24}{4}}$

$$10000\cdot 1.04^{\frac{t}{7}} = 30000\cdot 0.95^{\frac{t-24}{4}}$$
$$1.04^{\frac{t}{7}} = 3\cdot 0.95^{\frac{t-24}{4}}$$

Egalité : $\frac{t}{7}\log 1.04 = \log 3 + \frac{t-24}{4}\log 0.95$

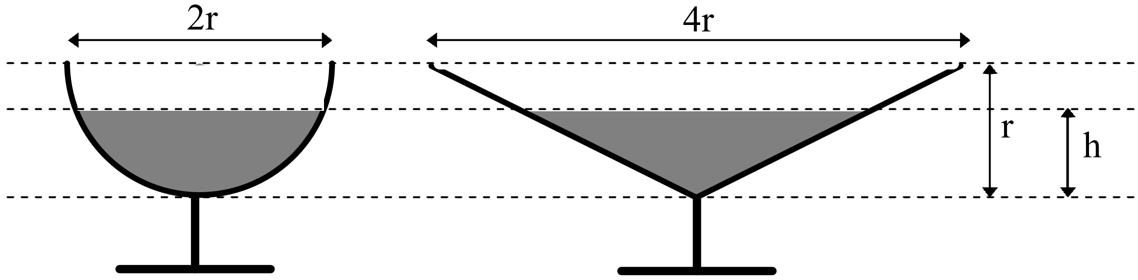
$$t\cdot 4\log 1.04 = 28\log 3 + 7(t-24)\log 0.95$$
$$t(4\log 1.04 - 7\log 0.95) = 28\log 3 - 7\cdot 24\log 0.95$$
$$t = \frac{28\log 3 - 7\cdot 24\log 0.95}{4\log 1.04 - 7\log 0.95} = \frac{17.10}{0.22} = 76{,}32\,mois \approx 6\,ans\,4\,mois...$$

Question 4 ... / 6 pts

A un apéritif, les boissons sont servies dans des verres à pied, les uns coniques, les autres hémisphériques.
On remplit tous les verres à la même hauteur h.
Déterminer cette hauteur h (en fonction de r) pour que tous les verres contiennent la même quantité de boisson.

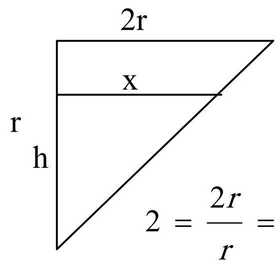
Les dimensions des verres, sans le pied, sont :

Verres coniques : hauteur r et diamètre $4r$
Verres hémisphériques : rayon r



Volume dans le verre sphérique : $\frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)$

Volume dans le verre conique : $\frac{1}{3}\pi(2h)^2 h = \frac{4}{3}\pi h^3$



$$2 = \frac{2r}{r} = \frac{x}{h}$$

$$x = 2h$$

Egalité :

$$\frac{1}{3}\pi h^2(3r-h) = \frac{4}{3}\pi h^3$$

$$h^2(3r-h) = 4h^3$$

$$3r - h = 4h$$

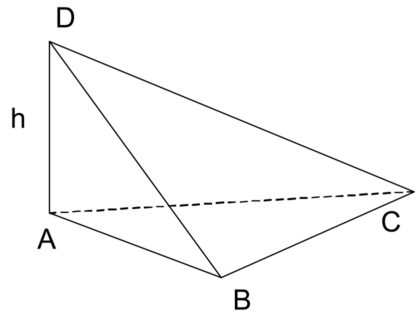
$$5h = 3r$$

$$h = \frac{3}{5}r \ ou \ h = 0$$

h = 0.6r (ou h = 0 : les deux verres sont vides)

Question 5 ... / 4 pts

D est le sommet d'une montagne de hauteur h ayant comme base horizontale le triangle ABC.



On connaît : BC = 8 km
AC = 14 km
γ = angle BCA = 45°
β = angle ABD = 18°

c) Calculer la hauteur h
d) Calculer la surface horizontale ABC

a) Théorème du cosinus triangle ABC :

$$AB^2 = 8^2 + 14^2 - 2 \cdot 8 \cdot 14 \cos 45° = 101.61$$

$$AB = 10.08 km$$

Triangle rectangle ABD :

$$\tan 18° = \frac{h}{AB} \qquad h = AB \tan 18° = 3.28 km = 3275 m$$

b) $aire_{ABC} = \dfrac{8 \cdot 14 \sin 45°}{2} = 39{,}60 km^2$

Question 6 ... / 4 pts

$\mathbf{d_1}$ est la droite du plan passant par A(3 ; -5) et B(8 ; 3)

$\mathbf{d_2}$ est la droite du plan passant par A et ayant la direction du vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Représenter ces deux droites et calculer l'angle entre elles

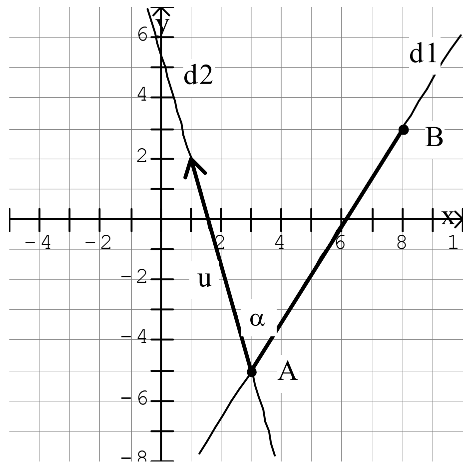
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\vec{u}\| \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{-2 \cdot 5 + 8 \cdot 7}{\sqrt{4+49} \cdot \sqrt{25+64}} = \frac{46}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{89}} = 0.670$$

$$\alpha = 47.95°$$



CANTON DE FRIBOURG / KANTON FREIBURG

Service de la formation professionnelle
Amt für Berufsbildung

ECOLE DES METIERS FRIBOURG

MATURITE PROFESSIONNELLE TECHNIQUE EXAMEN FINAL 2005

18 mai 2005 *4° MPT / 5° MPT post-CFC*

Heure de convocation 08 h 00 **Début de l'examen 08 h 10**

Nom, prénom : .... Classe : .... N° : ....

MATHEMATIQUES

L'examen de mathématiques est constitué de 2 parties :

1° partie : durée : 45 minutes 08 h 10 à 08 h 55 15 points

Les machines à calculer et les formulaires ne sont pas autorisés.

2° partie : durée : 90 minutes 09 h 10 à 10 h 30 30 points

Les machines à calculer et les formulaires sont autorisés.

Remarques :
- Les réponses sans développement ne sont pas valables.
- Si vous manquez de place, poursuivez au dos de la page précédente.
- La présentation doit être soignée.

Evaluation : $\frac{\text{(nombre de points)}}{45} \cdot 5 + 1 = \text{note}$ (arrondie au demi)

Points de la 1° partie : .... / 15

Points de la 2° partie : .... / 30

Total des points :..........

NOTE : ....

Examinateur: Laurent Karth Robadey
Date et signature: ....

Expert: Pascal Carron
Date et signature: ....

Nom et prénom: .... Profession: ....

MATHEMATIQUES $1^{ère}$ PARTIE

1. ....../ 4 pts.

Isolez x dans l'équation suivante et simplifiez votre réponse au maximum:

$a \cdot \sqrt[n]{a^{1-n} \cdot \sqrt[n]{a^{1-n}}} = \sqrt[x]{a}$

2. ....../ 4 pts.

Dans un rectangle, on a le rapport suivant:

$$\frac{\text{largeur}}{\text{longueur}} = \frac{2}{3}$$

Si la longueur est augmentée de 1 cm et si, simultanément, la largeur est diminuée de 2 cm alors la mesure de la diagonale reste identique.
Calculez la longueur et la largeur du rectangle initial.

3.

Résolvez l'équation suivante: ....../ 3 pts.

$$\sqrt{2x-3}-\frac{x}{\sqrt{2x-3}}=1$$

4.

On considère la fonction $f(x) = (x-1)^3 - 2$ ....../ 4 pts.

a) Tracez le graphe de la fonction $f(x) = (x-1)^3 - 2$ en le déduisant de celui de la fonction $g(x) = x^3$.
Notez les translations et symétries successives et dessinez les graphes intermédiaires.

b) Calculez la fonction réciproque de la fonction $f(x) = (x-1)^3 - 2$ et tracez son graphe.

MATHEMATIQUES 2ème PARTIE

1. ....../ 5 pts.

On déplace un point dans un système d'axes. On le fait partir de l'origine (0;0) et on veut le faire atteindre le point A(10;6) le long de segments rectilignes. En quittant l'origine, la trajectoire du point a une pente de 30%. Au bout d'un moment, on constate que pour arriver au point A, on doit multiplier la pente de la trajectoire par 4.

Calculez la distance parcourue par le point P.

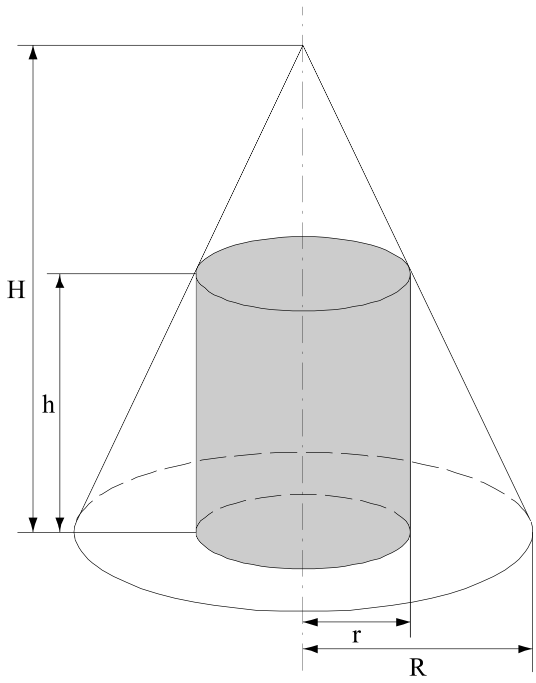
2.

....../ 6 pts.

Un cylindre est inscrit dans un cône de rayon R=4 cm et de hauteur H=12 cm.

a) Déterminer la hauteur h en fonction du rayon r du cylindre.

b) Calculez le rayon r et la hauteur h du cylindre dont l'aire totale est maximale.



3. Résolvez l'équation suivante: ....../ 4 pts.

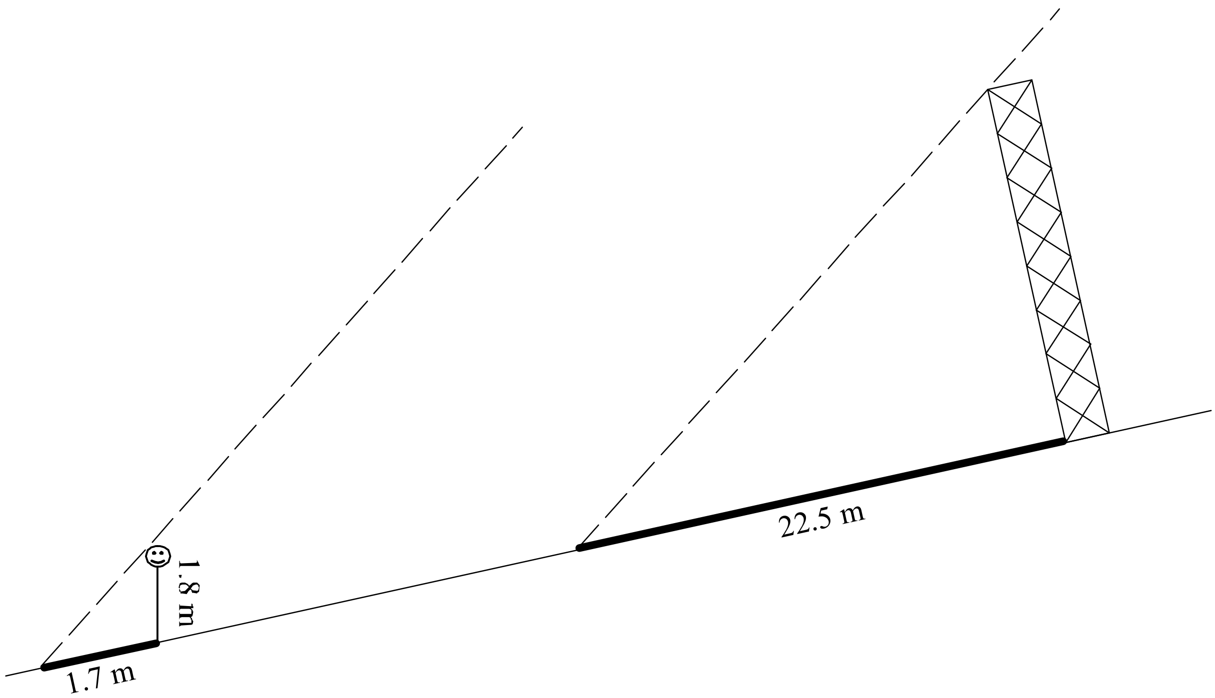
$$\log_9\left(3^x + 2\right) = x$$

4. ....../ 5 pts.

Une personne de 1,8m est sur la pente d'une montagne. Elle désire mesurer la longueur d'un poteau de téléphérique qui est perpendiculaire à la pente. Elle réalise les mesures suivantes :

- La longueur de l'ombre du poteau est de 22,5 m.
- La longueur de l'ombre de la personne, lorsque celle-ci est verticale, est de 1,7 m.
- Lorsque la personne avance sur la pente de 10 m, son altimètre indique une dénivellation de 4 m.

A l'aide de ces données, calculez la longueur du poteau (on supposera que les rayons du



soleil sont tous parallèles).

5. ....../ 5 pts.

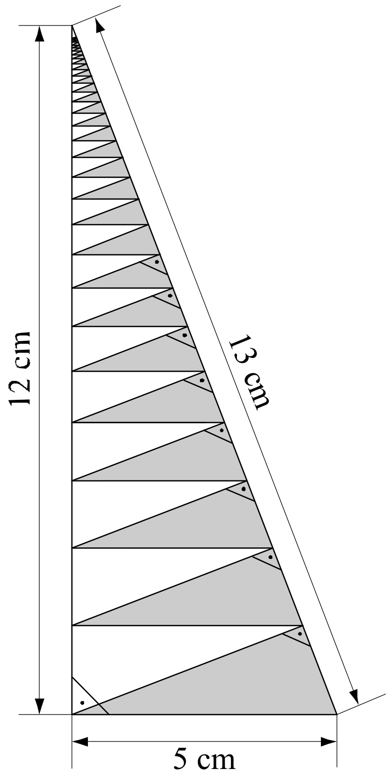
Les deux vecteurs suivants définissent les côtés d'un parallélogramme:

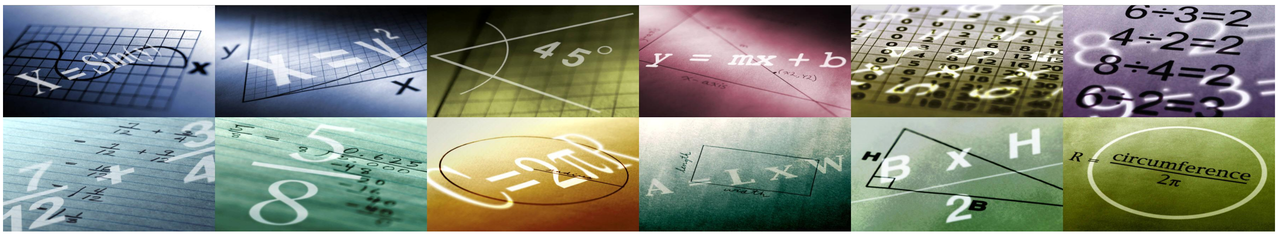
$$\vec{a}=\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Calculez les angles de ce parallélogramme.
b) Calculez la longueur de chacune de ses diagonales.
c) Calculez sa surface.

6. Calculez l'aire totale de tous les triangles gris: ....../ 5 pts.

Remarque:
Il y a un nombre infini de triangles gris.





Exercices divers

et

Réponses

Exercice 1

Simplifier au maximum l'expression : $$\left(\frac{\left(a^{-3}b^{-2}\,\frac{1}{a^{-2}b^{3}}\right)^{2}}{a^{2}b^{-5}\left(\frac{1}{a^{2}b^{3}}\right)^{2}}\right)^{2} =$$

Exercice 2

Résoudre l'équation : $$\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{x^2+5x+6}$$

Exercice 3

Résoudre l'inéquation : $$\frac{3x+2}{x-5}\le 2$$

Exercice 4

Représenter les solutions du système d'inéquations suivant : $$\begin{cases} x-2y+2\ge 0 \\ 3x+2y-18\le 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

Exercice 5

Le jet d'eau d'un tuyau d'arrosage forme une trajectoire décrite par l'équation :

$$y=-0{,}018x^2+1{,}2x \quad (x \text{ et } y \text{ en mètres})$$

La sortie du tuyau correspond à l'origine du repère.

Un jardinier aimerait savoir :

a) la hauteur maximale que l'eau atteint et à quelle distance du tuyau d'arrosage elle touche le sol lorsque le terrain est horizontal ?
b) A quelle distance du tuyau l'eau touche le sol lorsque le tuyau est au pied d'une pente de 30% ?

Exercice 6

Soit la fonction : $$f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$$

a) Déterminer les équations des asymptotes.
b) Déterminer les points d'intersection du graphe de la fonction avec les axes.
c) Tracez le graphe de la fonction.

Exercice 7

Résoudre l'équation : $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+7} + 2 = 0$

Exercice 8

Résoudre l'équation : $\dfrac{2x}{x+3} + \dfrac{5}{x} - 4 = \dfrac{18}{x+3}$

Exercice 9

Représenter graphiquement la solution du système : $\begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$

Exercice 10

Résoudre l'inéquation : $\dfrac{x+5}{x^2 - 7x + 12} \leq 0$

Exercice 11

De l'eau salée d'une concentration de 10g de sel par litre coule dans un grand réservoir contenant initialement 200l d'eau pure.

a) Si l'eau salée coule dans le réservoir à raison de 20l/min, calculer le volume de l'eau V(t) et la quantité de sel A(t) dans le réservoir après t minutes.

b) Déterminer une formule pour la concentration de sel c(t) (en g/l) après t minutes.

c) Etudier la variation de c(t) lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 12

Résoudre l'inéquation : $\dfrac{3}{2x+3} < \dfrac{1}{x-2}$

Exercice 13

a) Résoudre graphiquement le système d'inéquations : $\begin{cases} 3x - 4y \geq 12 \\ x - 2y \leq 2 \\ x \geq 9 \\ y \leq 5 \end{cases}$

b) Déterminer les points de croisement des droites limites.

Exercice 14

Résoudre le système d'équations : $\begin{cases} y = \dfrac{20}{x^2} \\ y = 9 - x^2 \end{cases}$

Exercice 15

On considère la fonction : $f(x)=\dfrac{4x}{2x-5}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f(x)$.
b) Déterminer les points de croisement du graphe de $f(x)$ avec les axes.
c) Déterminer les équations des asymptotes.
d) Tracer le graphe de la fonction.
e) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x)\le x-3$

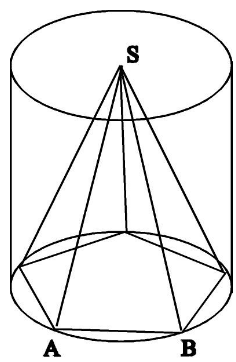
Exercice 16

Une compagnie de télévision par câble dessert actuellement 5000 ménages et fait payer 20fr par mois. Une étude de marché indique que chaque diminution de 1fr amène 500 nouveaux consommateurs.
Soit R(x) le revenu total par mois quand le prix mensuel est x francs.

a) Déterminer la fonction R.
b) Représenter le graphique de R et déterminer la valeur de x qui donne le revenu mensuel maximal.

Exercice 17

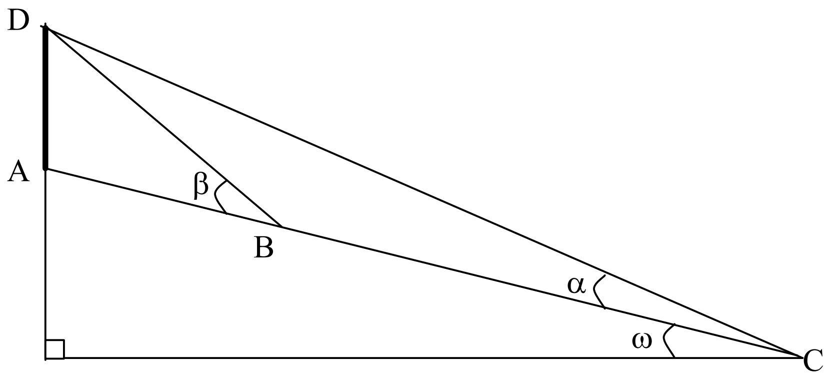
La base d'une pyramide droite est un pentagone régulier. La pyramide est inscrite dans un cylindre.
Calculer le volume entre la pyramide et le cylindre sachant que AB=5cm et que AS=18cm.



Exercice 18

Déterminer
a) h=AD
b) l'angle ω

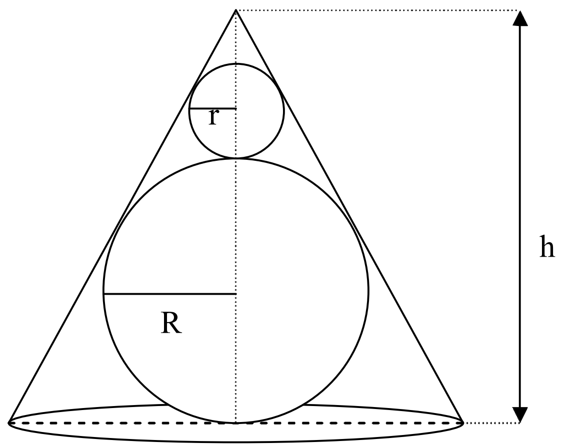
Sachant que :
AB=12cm
AC=37cm
α=10°23'
β=24°



Exercice 19

Deux sphères en contact l'une avec l'autre (voir schéma ci-contre) sont inscrites dans un cône circulaire droit. Leurs rayons r et R mesurent respectivement 1m et 3m.

Calculer le volume du cône.



Exercice 20

Résolvez les équation suivantes pour x tels que : $0 \leq x < 2\pi$

a) $2\cos x = \sqrt{3}$

b) $2\cos^2 x + \cos x = 0$

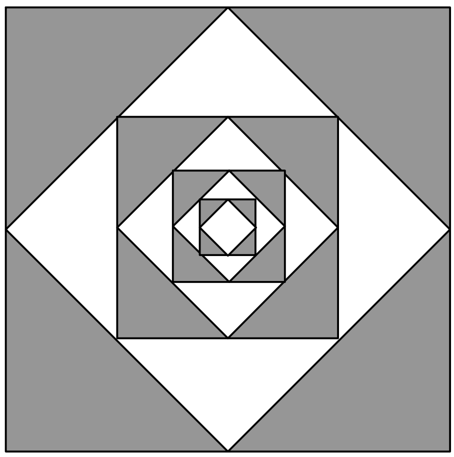
c) $\cos x - \sin x = 1$

d) $\cos x = \sin(x - \frac{\pi}{6})$

e) $\sin(4x) = \frac{1}{2}$

Exercice 21

On considère la figure ci-contre composée de carrés imbriqués indéfiniment. Le carré le plus grand à un côté de 10cm.
Calculer la surface grise.



Exercice 22

La population de l'Inde était approximativement de :

- 762 millions en 1985
- 795,9 millions en 1987

a) En le supposant constant, calculer le taux d'augmentation en pour cent de la population de l'Inde (arrondir à 2 chiffres après la virgule)

b) Si ce taux d'augmentation ne varie pas, estimer la population de l'Inde en 2010.

Exercice 23

Résoudre les équations suivantes :

a) $4 \cdot 8^{-x} + 5 \cdot 8^{x} - 12 = 0$

b) $\log\left(x^3\right) = (\log x)^3$

Exercice 24

Déterminer l'équation de la parabole passant par les points :

A(0 ;3) B(-1 ;-3) C(3 ;-3)

Exercice 25

Résoudre graphiquement l'équation et l'inéquation suivantes :

a) $\left|\frac{1}{x}\right| - \sqrt{x+5} = 0$

b) $\left|\frac{1}{x}\right| - \sqrt{x+5} < 0$

Exercice 26

Résoudre les équations suivantes :

$$\frac{5}{w^2} - \frac{10}{w} + 2 = 0 \qquad \frac{3x}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{-4}{x^2-4} \qquad \begin{cases} xy = 2 \\ 3x - y + 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x^3 - y^3 = 1 \\ 3x^3 + 4y^3 = 5 \end{cases}$$

Exercice 27

Avec un tuyau d'arrosage, une piscine peut être remplie en 8 heures. Avec un autre tuyau plus gros, employé seul, on la remplit en 5 heures.

En combien de temps remplira-t-on la piscine en employant simultanément les deux tuyaux ?

Exercice 28

La vitesse du courant d'un fleuve est de 5km/h. Il faut à un rameur 30 minutes de plus pour parcourir 1,2km en remontant le courant que la même distance en descendant.

Quelle est la vitesse du canoë en eau tranquille ?

Réponses

Exercice 1. solution: b^2

Exercice 2. solution: $S = \{-4\}$

Exercice 3. solution: $S = [-12;5[$

Exercice 4. solution: Triangle défini par les points : $(-2;0),(6;0),(4;3)$

Exercice 5. solution:

a) 20m et 66,7m
b) 52,20m

Exercice 6. solution:

a) AV : x=1
AH : y=2
b) (0,5 ;0) et (0 ;1)4
c) $

Exercice 7. solution: $S = \{2\}$

Exercice 8. solution: $S = \left\{\dfrac{-\sqrt{745}-25}{4};\dfrac{\sqrt{745}-25}{4}\right\}$

Exercice 9. solution:

Exercice 10. solution: $S =]-\infty;-5] \cup]3;4[$

Exercice 11. solution:

d) $V(t) = 20t + 200$ et $A(t) = 200t$
e) $C(t) = \dfrac{200t}{20t+200}$
f) 10g/l

Exercice 12. solution: $S =]-\infty;-1,5[\cup]2;9[$

Exercice 13. solution: Polygône $(32/3;),(12;5),(9;15/4),(9;7/2)$

Exercice 14. solution: $S = \{(2;5),(-2;5),(\sqrt{5};4),(-\sqrt{5};4)\}$

Exercice 15. solution:

a) $D_f = IR - \{5/2\}$
b) $(0;0)$
c) AH y=2 AV x=5/2
d)
e) $S = [3/4;5/2[\cup [5,7;+\infty[$

Exercice 16. solution:	15 francs
Exercice 17. solution:	$V=742{,}96m^3$
Exercice 18. solution:	a) h=9,52cm b) ω=35,17°
Exercice 19. solution:	V=254,47m
Exercice 20. solution:	
Exercice 21. solution:	$S=\frac{400}{3}cm^2$
Exercice 22. solution:	a) 2,20% b) 1,056 milliard c) durant l'année 2017
Exercice 23. solution:	a) $S=\left\{\frac{1}{3};\frac{\log(2/5)}{\log 8}\right\}$ b) $S=\left\{1;10^{\sqrt{3}}\right\}$
Exercice 24. solution:	$y=-2x^2+4x+3$
Exercice 25. solution:	a) $S\approx\{-4{,}9;-0{,}5;0{,}4\}$ b) $S\approx\left]-4{,}9;-0{,}5\right[\cup\left]0{,}4;+\infty\right[$
Exercice 26. solution:	$S=\left\{\frac{-\sqrt{15}-5}{2};\frac{\sqrt{15}-5}{2}\right\}$ $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$
Exercice 27. solution:	3 heures 4 minutes 37 secondes
Exercice 28. solution:	V=7km/h